## Convoluciones utilizando la transformada Z

Consideremos las secuencias $a = (\underline{1}, 1, 1, 1)$ y $b = (\underline{1}, 1, 1)$. En este ejercicio ilustrativo, calcularemos la convolución lineal $a * b$ y la convolución circular $a \circledast b$ utilizando sólo la transformada Z.

### Convolución lineal

Para obtener $c = a * b$ utilizamos la tranformada Z y calculamos $Z\{c\}$. Esto es

$$Z\{c\} = Z\{a * b\} = Z\{a\} \cdot Z\{b\}.$$

Antes de desarrollar este producto de expresiones polinómicas en Z, reparamos en lo siguiente: en este ejemplo $Z\{a\}$ es una expresión polinómica de grado 3 y $Z\{b\}$ es una expresión polinómica de grado 2. Luego, la potencia más alta del producto $Z\{a\} \cdot Z\{b\}$ será $Z^3 Z^2 = Z^5$. Entonces tendremos 6 coeficientes para la convolución lineal. Como ya sabemos, el largo de la convolución lineal lo podemos conocer de antemano contando la cantidad de elementos de $a$ y $b$, $N_b$ y haciendo $N_c = N_a + N_b - 1$, donde $N_a$, $N_b$ y $N_c$ son el número de coeficientes de $a$, $b$ y $c$, respectivamente.

Ahora sí, resolviendo obtenemos

$$Z\{a * b\} = Z\{a\} \cdot Z\{b\} = (1Z^0 + 1Z^1 + 1Z^2 + 1Z^3) \cdot (1Z^0 + 1Z^1 + 1Z^2).$$

Desarrollando el producto y agrupando respecto de las potencias de $Z$, resulta

$$Z\{a * b\} = 1Z^0 + 2Z^1 + 3Z^2 + 3Z^3 + 2Z^4 + 1Z^5.$$

Tomando los coeficientes de la expresión anterior obtenemos la convolución lineal:

$$c = (\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1).$$

El número de coeficientes de $c$ verifica $N_c = 4 + 3 - 1 = 6$. Otro análisis que podemos hacer del resultado para corroborar es constatar que se cumple que si $\Sigma_j a_j = 4$ y $\Sigma_j b_j = 3$, entonces $\Sigma_j c_j = 12 = \Sigma_j a_j \cdot \Sigma_j b_j$. Para descubrir de donde surge esta propiedad, debemos pensar en la respuesta en frecuencia. Otro pequeño ejercicio interesante para que resuelva el lector o la lectora de este apunte.

### Convolución circular

Para obtener $c = a \circledast b$ utilizamos lo previamente calculado. Observamos que en este caso deberíamos considerar que $b = (1, 1, 1, 0)$ si utilizamos el resto de lo métodos (grilla, matriz, etc.) para obtener las convoluciones. Aquí, utilizando sólo la transformada $Z$, no es necesario completar con 0 las secuencias para que ambas tengan el mismo número de coeficientes. En este caso completar con ceros hasta que el número de coeficientes de $b$ sea $N = 4$.

Escribimos el resultado anterior:

$$Z\{a * b\} = 1Z^0 + 2Z^1 + 3Z^2 + 3Z^3 + 2Z^4 + 1Z^5.$$

Para la convolución circular tomamos $Z = e^{-i2\pi/N}$, con $N = 4$. Dado que ahora $Z^N = 1$, entonces en la expresión polinómica anterior resulta que $Z^4 \equiv Z^0$ y $Z^5 = Z^4 Z^1 \equiv Z^1$. Utilizando esta propiedad, obtenemos

$$Z\{a \circledast b\} = 1Z^0 + 2Z^1 + 3Z^2 + 3Z^3 + 2Z^0 + 1Z^1.$$

Luego, agrupando en las potencias de $Z$ correspondientes

$$Z\{a \circledast b\} = (1 + 2)Z^0 + (2 + 1)Z^1 + 3Z^2 + 3Z^3 = 3Z^0 + 3Z + 3Z^2 + 3Z^3.$$

Tomando los coeficientes de la expresión anterior obtenemos el resultado deseado $a \circledast b = (\underline{3}, 3, 3, 3)$. Nuevamente, podemos revisar que se cumple $\Sigma_j a_j \cdot \Sigma_j b_j = \Sigma_j c_j$.

En síntesis, utilizando la gran herramienta de la transformada Z, es posible ver claramente las similitudes y el orígen de la diferencia entre los distintos tipos de convolución.