Convolución como matriz por vector

La *definición* de la convolución lineal $c_t = a_t * b_t$ entre las secuencias a_t y b_t está dada por:

$$c_t = \sum_k a_k \, b_{t-k}.$$

Mediante un simple cambio de variables, $l = t - k$, se puede demostrar que la convolución es conmutativa y podemos entonces escribir:

$$c_t = \sum_k b_k \, a_{t-k}.$$

Desarrollamos la sumatoria y suponiendo −sin pérdida de generalidad− que b_t es causal:

$$c_t = b_0 \, a_t + b_1 \, a_{t-1} + b_2 \, a_{t-2} + b_3 \, a_{t-3} + \dots \,. \tag{1}$$

Es decir, la convolución entre a_t y b_t puede entenderse como la suma de los sucesivos retardos de a_t escalados por los correspondientes elementos de b_t.

Notación vectorial

Consideremos ahora por ejemplo las secuencias $a_t = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ y $b_t = (b_0, b_1, b_2, b_3)$. Escribamos a_t y b_t como vectores columna $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente:

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^\top = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)^\top = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \,.$$

De esta forma, reemplazando en la ecuación 1, c_t será un vector columna de tamaño $N_c = N_a + N_b - 1 = 7$ dado por:

$$\mathbf{c} = b_0 \, \mathbf{a}_t + b_1 \, \mathbf{a}_{t-1} + b_2 \, \mathbf{a}_{t-2} + b_3 \, \mathbf{a}_{t-3}.$$

Esta suma escalada de vectores columna la podemos escribir como:

$$\mathbf{c} = b_0 \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \,.$$

O bien, en forma compacta, como un producto de matrices:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \,.$$

Es decir, hemos escrito la convolución $c_t = a_t * b_t$ como una multiplicación de una matriz por un vector columna de la forma $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores columna y la matriz $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix},$$

conocida como *matriz de convolución de* a_t. En nuestro ejemplo, $\mathbf{A}$ es de $7{\times}4$.

Observación: La matriz $\mathbf{A}$ depende de:

- La secuencia a_t, que determina los elementos de $\mathbf{A}$.
- El tamaño de a_t y b_t, que determinan el tamaño de $\mathbf{A}$.