La transformada de Hilbert y el adelanto de fase independiente de la frecuencia:

Los corrimientos en fase de una onda que se propaga pueden deberse a diversos mecanismos. Por ejemplo, en el factor de fase $\exp\left[-i\Omega\left(t-\vec{s}.\vec{x}\right)\right]$ de una onda plana, podemos definir un corrimiento de la fase debido a la propagación: $\phi(\Omega)=\Omega\vec{s}.\vec{x}$, tal corrimiento es un retardo de la fase el cual es equivalente a un retardo en tiempo igual a $\vec{s}.\vec{x}$. Otros ejemplos son el retardo de la fase debido a la atenuación y el adelanto de la fase que se produce cuando una onda de volumen toca una cáustica.

El punto que queremos remarcar es que: existe cierta ambigüedad en el signo del corrimiento en fase, el cual depende del signo de la frecuencia y de la convensión que adoptemos para el signo de la transformada de Fourier. Sin embargo, si hablamos de retardo de la fase y de adelanto de la fase le damos un significado físico preciso al efecto que produce el corrimiento de la fase y nos libramos de cualquier ambigüedad.

Consideremos una función del tiempo $f=f(t)$, cuyas transformadas directa e inversa de Fourier estarán dadas respectivamente por:

$$F(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\Omega t}dt$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{-i\Omega t}d\Omega$$

Si las componentes de Fourier de la función $f=f(t)$ sufren, todas ellas, un adelanto de la fase igual a $\frac{\pi}{2}$ radianes, la función $f^{\frac{\pi}{2}}=f^{\frac{\pi}{2}}(t)$ resultante de tal corrimiento de la fase estará dada, en tiempo, por:

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\exp\left[-i\Omega\left(t+\frac{\pi}{2\Omega}\right)\right]d\Omega=\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{-i\Omega t}e^{-i\frac{\pi}{2}signo(\Omega)}d\Omega$$

Sustituyendo $F(\Omega)$ por su expresión:

$$F(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\Omega t}dt$$

Obtenemos:

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\Omega\tau}d\tau\right]e^{-i\Omega t}e^{-i\frac{\pi}{2}signo(\Omega)}d\Omega$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left[i\Omega\left(\tau - t\right)\right]\exp\left[-i.\frac{\pi}{2}signo(\Omega)\right]d\Omega d\tau$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{0}\exp\left[i\Omega\left(\tau - t\right)\right]\exp\left[i\frac{\pi}{2}\right]d\Omega + \int_{0}^{\infty}\exp\left[i\Omega\left(\tau - t\right)\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{2}\right]d\Omega\right]f(\tau)d\tau$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}\exp\left[-i\Omega\left(\tau - t\right)\right]\exp\left[i\frac{\pi}{2}\right]d\Omega + \int_{0}^{\infty}\exp\left[i\Omega\left(\tau - t\right)\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{2}\right]d\Omega\right]f(\tau)d\tau$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{0}^{\infty}\frac{\exp\left[i\Omega(\tau - t) - i\frac{\pi}{2}\right] + \exp\left[-i\Omega\left(\tau - t\right) + i\frac{\pi}{2}\right]}{2}d\Omega d\tau$$

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{0}^{\infty}\cos\left[\Omega(\tau - t) - \frac{\pi}{2}\right]d\Omega d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{0}^{\infty}\sin\left[\Omega\left(\tau - t\right)\right]d\Omega d\tau$$

En una tabla de integrales definidas podemos encontrar que:

$$\int_{0}^{\infty}\sin\left[\Omega\left(\tau - t\right)\right]d\Omega = \frac{1}{\left(\tau - t\right)}$$

Reemplazando nos queda:

$$f^{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\left(\tau - t\right)}d\tau$$

La función $f^{\frac{\pi}{2}}(t)$ suele ser llamada *función aliada de* $f(t)$.
La singularidad en $\tau = t$ es salvada tomando el valor principal de la integral, es decir cancelando las contribuciones cuando $\tau \to t^{-}$ con las contribuciones cuando $\tau \to t^{+}$.
La expresión obtenida es una forma de la transformada de Hilbert de $f(t)$ la cual se expresa de la siguiente manera:

$$H\left[f(t)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\left(\tau - t\right)}d\tau$$

La transformada de Hilbert puede ser vista como una convolución:

$$H\left[f(t)\right] = f(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

En la práctica, para obtener la transformada de Hilbert, se calcula la transformada de Fourier $F(\Omega)$, se intercambian la parte real y la parte imaginaria, se cambia el signo de la parte imaginaria resultante, y se calcula la transformada inversa de Fourier.

Si dada una función $f = f(t)$, le aplicamos un adelanto de la fase de ε radianes, la función resultante $f^{\varepsilon} = f^{\varepsilon}(t)$, estará dada por:

$$f^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega).\exp\left[-i\varepsilon signo(\Omega)\right]\exp\left(-i\Omega t\right)d\Omega$$

$$f^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\left[\cos(\varepsilon) - i\, signo(\Omega)\sin(\varepsilon)\right]\exp\left(-i\Omega t\right)d\Omega$$

$$f^{\varepsilon}(t) = \cos(\varepsilon)f(t) + \sin(\varepsilon)H\left[f(t)\right]$$

La transformada de Hilbert de la delta de Dirac está dada por:

$$H\left[\delta(t)\right] = -\frac{1}{\pi t}$$

Una función cajón que vale la unidad para $0 < t < T$ y vale cero para cualquier otro valor de *t*, tiene una transformada de Hilbert igual a $\left(\frac{-1}{\pi}\right)\left(\ln|t| - \ln|t-T|\right)$. Si $t << T$, la función cajón se aproxima a la función de Heaviside, y su transformada de Hilbert se aproxima a $\left(\frac{-1}{\pi}\right)\ln\left|\frac{t}{T}\right|$.

Por último, debemos notar que el espectro de amplitud de la transformada de Hilbert de una función es igual al espectro de amplitud de la función original.