Transformada de Fourier de Secuencias Entrelazadas:

Dadas dos series de longitud N: $(a_0, a_1, a_2,..., a_{N-1})$ y $(b_0, b_1, b_2,..., b_{N-1})$ y sus transformadas discretas de Fourier: $(A_0, A_1, A_2,..., A_{N-1})$ y $(B_0, B_1, B_2,..., B_{N-1})$.
Formaremos una nueva secuencia c_n de longitud 2N, entrelazando las secuencias a_n y b_n, del siguiente modo:

$$c_n = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_{N-1}, b_{N-1})$$

Veamos como calcular la transformada discreta de Fourier de la serie entrelazada, a partir de la TDF de las dos secuencias originales:

$$A_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$$

$$B_k = \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$$

La transformada discreta de Fourier de la serie entrelazada estará dada por:

$$C_k = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{2\pi}{2N}lk} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N}lk} \qquad k = 0,2N-1$$

Para obtener C_k a partir de A_k y de B_k necesitamos dos fórmulas diferentes, una para $k = 0, N-1$ y otra para $k = N,2N-1$.

Obtengamos la primera fórmula válida para $k = 0, N-1$:

Separemos la suma en dos partes, observando que a_n multiplica a las potencias pares de $e^{-i\frac{\pi}{N}}$ mientras que b_n multiplica a las potencias impares, obtenemos:

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} + \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+\frac{1}{2})k} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} + e^{-i\frac{\pi}{N}k} \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$$

$$C_k = A_k + e^{-i\frac{\pi}{N}k} B_k \qquad k = 0, N-1$$

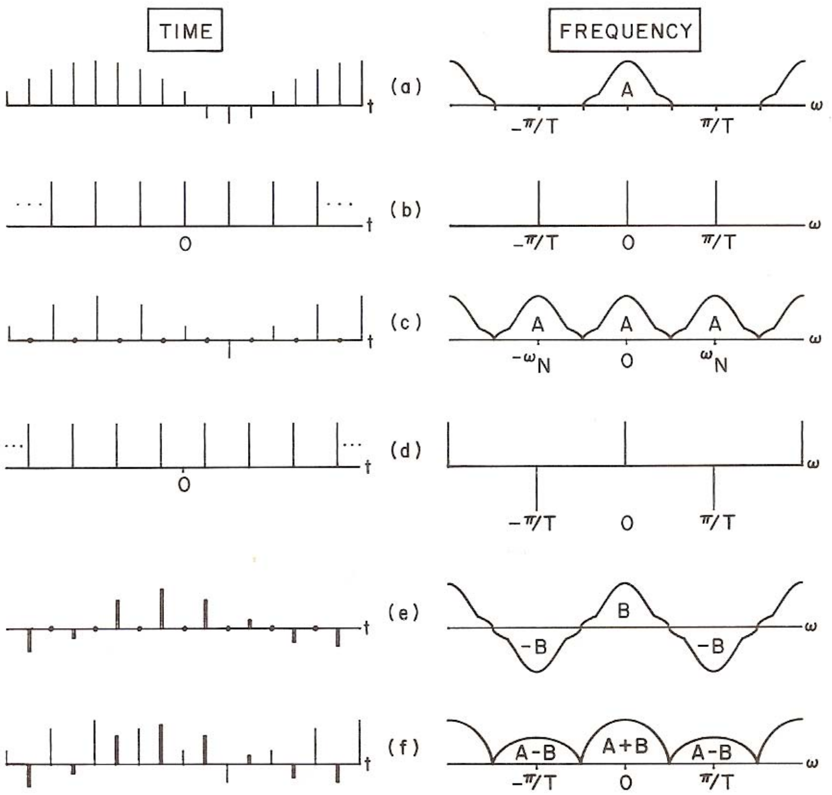
Obtengamos ahora la segunda fórmula, válida para $k = N,2N-1$:

$$C_k = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N}lk} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N}l(k-N+N)} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N}l(k-N)} e^{-i\frac{\pi}{N}lN} = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l e^{-i\frac{\pi}{N}l(k-N)} (-1)^l$$

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k-N)} - \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+\frac{1}{2})(k-N)} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k-N)} - e^{-i\frac{\pi}{N}(k-N)} \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k-N)}$$

$$C_k = A_{k-N} - e^{-i\frac{\pi}{N}(k-N)} B_{k-N} \qquad k = N, 2N-1$$

En la figura siguiente tomada del Karl (pág. 149), podemos encontrar una interpretación gráfica de las expresiones obtenidas:



En la figura a) vemos la serie a_n y su TDF A_k con un intervalo de muestreo que sería la mitad del que realmente tiene, es decir con el intervalo de muestreo de la serie entrelazada. En la figura b) vemos el operador que nos permitirá poner en cero una muestra por medio. En la figura c) vemos la serie a_n de la fig. a) pero con una muestra por medio en cero. En la figura d) vemos el operador que nos permitirá poner en cero una muestra por medio de la serie b_n, suponiendo que esta tiene el intervalo de muestreo de la serie entrelazada (no hay una figura para esta serie, pero sería análoga a la fig. a), y que además le introduce un retardo de una muestra. En la figura e) vemos la serie b_n con una muestra por medio en cero y retardada en una muestra. Finalmente en la figura f) tenemos la secuencia entrelazada c_n y su espectro de amplitud C_k, en ella podemos ver gráficamente el significado de las expresiones que dedujimos:

$$C_k = A_k + e^{-i\frac{\pi}{N}k} B_k \qquad k = 0, N-1$$

$$C_k = A_{k-N} - e^{-i\frac{\pi}{N}(k-N)} B_{k-N} \qquad k = N, 2N-1$$