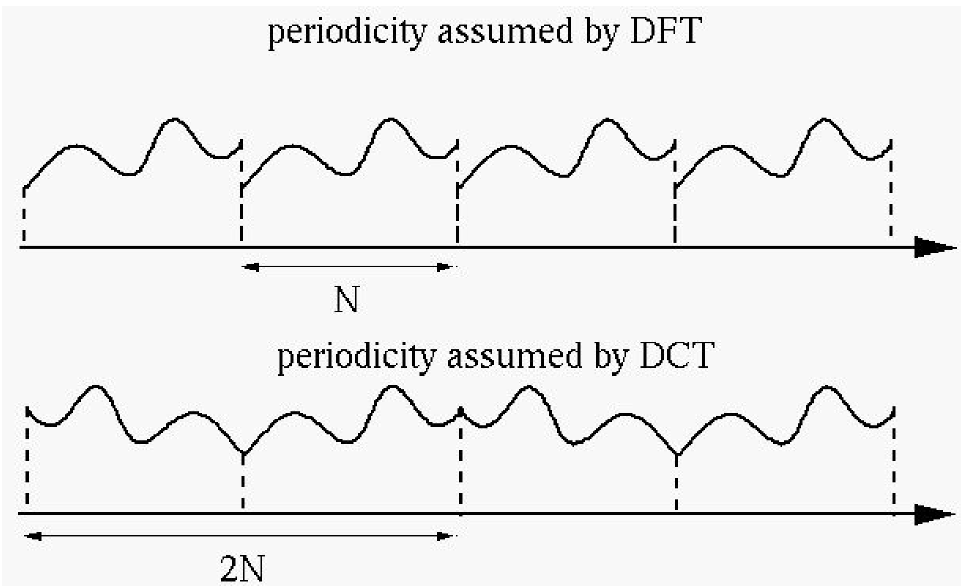
7. Aplicaciones de la Transformada de Fourier:

(Continuación)

Transformada Discreta Coseno:

Discrete Cosine Transform (DCT)

La transformada discreta de Fourier (DFT) mapea una señal compleja a un espectro de frecuencia complejo. Sin embargo, si la señal es real en tiempo, como ocurre en la gran mayoría de las aplicaciones, la mitad de los datos en el dominio complejo de Fourier son redundantes. Si en el dominio del tiempo, la parte imaginaria de la señal es cero, en el dominio de la frecuencia, la parte real del espectro es par y la parte imaginaria es impar. En comparación, la transformada discreta coseno (DCT), es una transformación real, que mapea una secuencia real y causal en tiempo en una secuencia real y causal en frecuencia. Por lo tanto evita el problema de redundancia de la información en el dominio de la frecuencia. Además, como la DCT es derivada a partir de la DFT, la mayoría de las propiedades deseables de la DFT, como por ejemplo, la transformada rápida, son preservadas.
Para derivar la DCT de una señal causal de longitud N, primero vamos a extenderla a simétrica, de longitud 2N, y luego vamos a extenderla a periódica de período 2N. Haremos la extensión de la señal a simétrica, no respecto del origen, sino respecto del punto medio entre el origen y la primera nueva muestra con subíndice negativo, es decir $n = -1/2$.
Si retardamos la señal simétrica y periódica obtenida, en media muestra, entonces la señal será par o simétrica respecto del origen y de período 2N. Al hacer la extensión de la señal de esta manera no nos quedan saltos o discontinuidades en los extremos de las réplicas como sí habitualmente se presentan en la DFT.



$$x_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$$

$$x_n^s = (x_{N-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0, \underline{x_0}, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$$

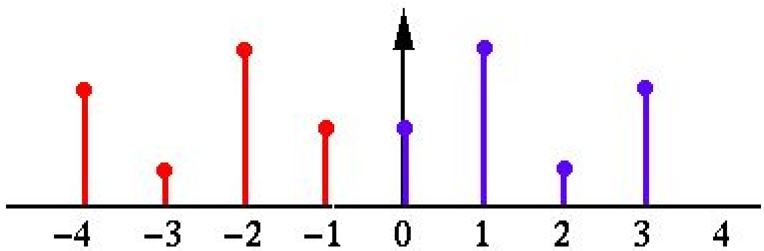
$$x_n^s = x_{-n-1}^s = x_{2N-n-1}^s$$

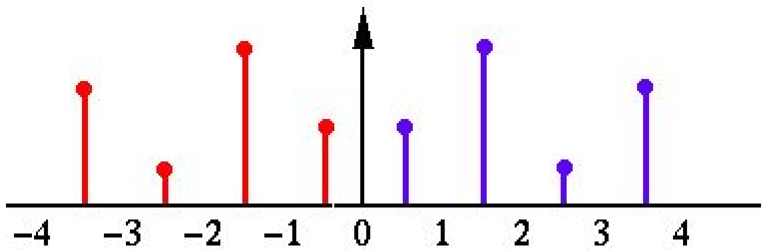
Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$n = m - 1/2$$

$$x_{m-1/2}^s = x_{-m-1/2}^s = x_{2N-m-1/2}^s$$

Observamos que m toma valores no enteros en los puntos medios entre los valores enteros de n. Si graficamos la secuencia respecto de n y de m, obtenemos respectivamente:





Calculamos la transformada discreta de Fourier de esta secuencia simétrica de longitud 2N, y obtenemos:

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{m=-N+1/2}^{N-1/2} x_{m-1/2}^s \, e^{-i \frac{2\pi}{2N} km}$$

$$k = 0, \ldots, 2N-1$$

Observemos que al factor de normalización lo repartimos entre las transformadas directa e inversa.

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{m=-N+1/2}^{N-1/2} x^s_{m-1/2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{2N} km \right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{2N} km \right) \right)$$

Como en la parte imaginaria de la sumatoria estamos sumando el producto de una función par $x^s{}_{m-1/2}$ por una función impar, como es el seno, esta parte imaginaria se cancela:

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{m=-N+1/2}^{N-1/2} x^s_{m-1/2} \cos\left(\frac{2\pi}{2N} km \right)$$

Por la simetría par de los términos restantes, podemos reescribir esta sumatoria del siguiente modo:

$$X_k = \frac{2}{\sqrt{2N}} \sum_{m=1/2}^{N-1/2} x^s_{m-1/2} \cos\left(\frac{2\pi}{2N} km \right)$$

Eliminamos el supraíndice "s" ya que para subíndices positivos no es necesario conservarlo, e introducimos el factor 2 dentro de la raíz, con lo cual nos queda:

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=1/2}^{N-1/2} x_{m-1/2} \cos\left(\frac{2\pi}{2N} km \right)$$

A continuación hacemos el siguiente cambio de variables:

$$m = n + 1/2$$

Y obtenemos la siguiente expresión:

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi}{2N} k(n+1/2) \right)$$

Donde la frecuencia está dada por:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{2N} k = \frac{\pi}{N} k$$

Es habitual escribir esta expresión de la siguiente manera:

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{\pi}{N} k \frac{(2n+1)}{2} \right)$$

Es fácil de verificar que al introducir el factor $1/\sqrt{2N}$ en la definición de la DCT, obtenemos una transformación ortonormal, excepto para el coeficiente X_0. Para normalizar el coeficiente X_0 debemos introducir la siguiente modificación:

$$X_k = \sqrt{\frac{2-\delta_k}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi}{N} k \frac{2n+1}{2} \right)$$

Donde:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & si \quad k=0 \\ 0 & si \quad k \neq 0 \end{cases}$$

De forma más compacta, es posible expresar la DCT, del siguiente modo:

$$C_{kn} = \sqrt{\frac{2-\delta_k}{N}} \cos\left(\frac{\pi}{N} k \frac{(2n+1)}{2} \right)$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_{kn} \; x_n$$

Donde la matriz C_{kn} es ortonormal y real, en consecuencia su inversa, es la matriz transpuesta. Es decir que la DCT inversa se puede escribir de la siguiente manera:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} C_{kn} \quad X_k$$

Por lo tanto podemos escribir la DCT directa e inversa, en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{cases} X = C\,x \\ x = C^T\,X \end{cases}$$

Existen cuatro tipos diferentes de DCT. La que presentamos aquí es denominada tipo II. Es la forma más habitualmente utilizada y es conocida como DCT-II. Cada una de estas cuatro posibles variaciones dependen de la manera en la que extendamos la secuencia causal original a simétrica y periódica.

<u>Transformada Discreta Coseno en Dos Dimensiones:</u>

Two Dimensional Discrete Cosine Transform (2D-DCT-II)

$$C_{jkmn}=\sqrt{\frac{2-\delta_j}{M}}\ \sqrt{\frac{2-\delta_k}{N}}\ \cos\left(\frac{\pi}{M}j\frac{(2m+1)}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}k\frac{(2n+1)}{2}\right)$$

$$X_{jk}=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}C_{jkmn}\ x_{mn}$$

$$x_{mn}=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}C_{jkmn}\ X_{jk}$$

Es posible expresar la 2D-DCT-II matricialmente, del siguiente modo:

$$\underset{M\times N}{X} = \underset{M\times M}{C_M}\ \underset{M\times N}{x}\ \underset{N\times N}{C_N^T}$$

$$\underset{M\times N}{x} = \underset{M\times M}{C_M^T}\ \underset{M\times N}{X}\ \underset{N\times N}{C_N}$$

Donde C_M y C_N son matrices cuadradas de orden M y N respectivamente, dadas por:

$$C_M\equiv C_{jm}=\sqrt{\frac{2-\delta_j}{M}}\ \cos\left(\frac{\pi}{M}j\frac{(2m+1)}{2}\right)$$

$$C_N\equiv C_{kn}=\sqrt{\frac{2-\delta_k}{N}}\ \cos\left(\frac{\pi}{N}k\frac{(2n+1)}{2}\right)$$