**Relación de ortogonalidad de la transformada discreta de Fourier:**

Una progresión geométrica de la forma:

$$x_n = a^n$$

puede ser sumada desde $n$ igual 0 hasta $N-1$ inclusive de la siguiente forma:

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n = \sum_{n=0}^{N-1} a^n \ .$$

Luego:

$$aS(N) = \sum_{n=0}^{N-1} a^{n+1} = \sum_{n=1}^{N} a^n \ .$$

Sustrayendo la segunda ecuación de la primera obtenemos:

$$(1-a)S(N) = \sum_{n=0}^{N-1} a^{n+1} - \sum_{n=1}^{N} a^n = 1 - a^N$$

$$\Rightarrow \quad S(N) = \frac{1-a^N}{1-a}.$$

Si $a$ es de la forma:

$$a = e^{i\frac{2\pi}{N}k}$$

Entonces tenemos:

$$S(N) = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{N}kN}}{1+e^{i\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{e^{i\pi k}(e^{i\pi k} - e^{-i\pi k})}{e^{i\frac{\pi}{N}k}(e^{i\frac{\pi}{N}k} - e^{-i\frac{\pi}{N}k})} = e^{i\frac{\pi}{N}(N-1)k} = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / N)}$$

En esta última expresión podemos observar que el numerador de la fracción es cero para todo valor de $k$ entero (positivo o negativo) distinto de cero. El denominador es cero para cualquier valor de $k$ que sea un múltiplo entero de $N$ o cero, en estos casos ambos son cero, pero aplicando la regla de L´Hopital vemos que la fracción toma el valor $N$. Esto no debe sorprendernos si recordamos la forma original de la expresión como una suma de exponenciales.

Entonces tenemos:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k.n} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es entero y no es múltiplo de } N \\ N & \text{si } k \text{ es múltiplo entero de } N \text{ o cero} \end{cases}$$

Esto puede ser asociado con la relación de ortogonalidad de la transformada discreta de Fourier, reemplazando $k$ por $(k-j)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k-j)}$$

Tanto $k$ como $j$ toman valores desde 0 hasta $N-1$. Es decir:

$$-(N-1) \ \leq (k-j) \leq (N-1)$$

Por lo tanto para analizar los casos en los que la suma es distinta de cero, no necesitamos considerar los múltiplos enteros de $N$, sólo necesitamos considerar el caso cuando $(k-j)=0$, es decir cuando $k=\mathrm{j}$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k-j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ N & \text{si } k = j \end{cases}$$

Con lo cual queda demostrada la relación de ortogonalidad de las funciones discretas exponenciales complejas de la transformada discreta de Fourier.