

## Procesos Aleatorios o Estocásticos:

Un proceso aleatorio es una familia indexada de variables aleatorias  $x_n$ . Una familia de variables aleatorias es caracterizada por un conjunto de funciones distribución de probabilidades  $p_{x_n}$  que en general pueden ser función del índice n. Cuando usamos el concepto de proceso aleatorio como un modelo para una señal aleatoria, el índice es generalmente asociado con el tiempo, aunque podría ser asociado con espacio o con cualquier otro parámetro físico posible. Una variable aleatoria es definida por una función distribución de probabilidades o por una función densidad de probabilidades. La interdependencia de dos variables aleatorias es definida por la función distribución de probabilidades conjunta o por la función densidad de probabilidades conjunta. Si esta interdependencia no existiera se dice que las variables son estadísticamente independientes. Una caracterización completa de un proceso aleatorio requiere de la especificación de todas las funciones de probabilidades posibles.

Como dijimos las funciones de probabilidades pueden ser función de un índice de tiempo, cuando la función de probabilidades conjunta es independiente de un corrimiento del origen de los índices de tiempo, se dice que el proceso aleatorio es estacionario. En el procesamiento de señales digitales se suelen usar procesos aleatorios como modelos para señales, es decir, una señal particular puede ser considerada como una secuencia muestra de un proceso aleatorio.

## Promedios:

Es habitual caracterizar una variable aleatoria por promedios estadísticos tales como el valor medio y la varianza. Dado que un proceso aleatorio es un conjunto indexado de variables aleatorias, podríamos caracterizar al proceso aleatorio mediante los promedios estadísticos de las variables aleatorias que lo conforman. Tales promedios son llamados “ensemble averages”.

El valor medio de un proceso aleatorio es definido como:

$$m_{x_n} = E\{x_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{x_n}(x)dx$$

Donde  $p_{x_n}(x)$  es la función densidad de probabilidades de la variable aleatoria  $x_n$ .

Por lo general los promedios son función de los índices de tiempo, sin embargo cuando los procesos son estacionarios, el valor medio es el mismo para todas la variables aleatorias que conforman el proceso y lo denotaremos simplemente  $m_x$ .

La varianza de un proceso aleatorio está dada por:

$$\sigma_{x_n}^2 = E\left\{\left(x_n - m_{x_n}\right)^2\right\} = E\{x_n^2\} - m_{x_n}^2 = \text{mean\_square} - \text{mean}^2$$

En general el valor cuadrático medio y la varianza son funciones del índice de tiempo, sin embargo cuando los procesos son estacionarios estos promedios son constantes.

El valor medio, el valor cuadrático medio y la varianza son simples promedios que nos proporcionan una pequeña cantidad de información sobre el proceso. El más útil de los promedios es la secuencia de auto-correlación, que está definida como:

$$\phi_{xx}(n, m) = E\{x_n x_m^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{x_n, x_m}(x_n, x_m) dx_n dx_m$$

La secuencia de auto-covarianza de un proceso aleatorio es definida como:

$$\gamma_{xx}(n, m) = E\{(x_n - m_{x_n})(x_m - m_{x_m})^*\} = \phi_{xx}(n, m) - m_{x_n} m_{x_m}$$

La auto-covarianza es una medida de la dependencia entre los valores de un proceso aleatorio a diferentes tiempos, es decir, que es una medida de la variación temporal de una señal aleatoria.

Como hemos señalado las propiedades estadísticas de un proceso aleatorio varían generalmente con el tiempo. Sin embargo si el proceso es estacionario las propiedades estadísticas son invariantes a un corrimiento del origen de los tiempos. Esto significa que el valor medio y la varianza son independientes del tiempo, mientras que la auto-correlación y la auto-covarianza son dependientes de las diferencias de tiempo. Es decir que para un proceso estacionario podemos escribir:

$$m_x = E\{x_n\}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x_n - m_x)^2\}$$

Independientes de n, y si identificamos la diferencia en tiempo como m, podemos escribir la auto-correlación como:

$$\phi_{xx}(n, n+m) = \phi_{xx}(m) = E\{x_n x_{n+m}^*\}$$

Podemos encontrar procesos aleatorios cuyas funciones de probabilidades no son invariantes en el tiempo, sin embargo, el valor medio, la varianza y la auto-correlación las podemos expresar con las mismas ecuaciones anteriores, en estos casos se dice que el proceso aleatorio es un proceso estacionario en el sentido amplio.

### Promedios Temporales:

**En el contexto de procesamiento de señales los procesos aleatorios son un concepto matemáticamente conveniente que nos permite utilizar la teoría de probabilidades para representar señales de energía infinita. Sin embargo en la práctica tratamos con una única secuencia y no con un universo (*ensemble*) infinito de secuencias.**

En consecuencia tendremos que inferir ciertas propiedades estadísticas del proceso aleatorio a partir de una única realización (es decir un único miembro del *ensemble* )

Definimos el promedio temporal de un proceso aleatorio estacionario como:

$$\langle x_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n$$

Análogamente para la secuencia de auto-correlación:

$$\langle x_n x_{n+m}^* \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+m}^*$$

Estos promedios temporales son funciones de un conjunto infinito de variables aleatorias y por lo tanto ellos también son variables aleatorias. Sin embargo, bajo una condición conocida como ergodicidad, estos promedios temporales (time average) son iguales a los correspondientes promedios estadísticos (ensemble average). Es decir que bajo la hipótesis de ergodicidad tenemos que:

$$\langle x_n \rangle = E\{x_n\} = m_x$$

$$\langle (x_n - m_x)^2 \rangle = E\{(x_n - m_x)^2\} = \sigma_x^2$$

$$\langle x_n x_{n+m}^* \rangle = E\{x_n x_{n+m}^*\} = \phi_{xx}(m)$$

Un proceso aleatorio para el cual los promedios estadísticos son iguales a los promedios temporales es llamado proceso ergódico.

En la práctica es común asumir que una secuencia dada es una secuencia muestra (sample sequence) de un proceso aleatorio ergódico (ergodic random process). Entonces los promedios pueden ser calculados a partir de una única secuencia de energía infinita. Por supuesto que tampoco podemos calcular los promedios temporales para los límites entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . Lo que podemos calcular son promedios de la secuencia muestra (sample average) que serán estimadores del valor medio, la varianza y la auto-correlación:

$$\langle x_n \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n = \hat{m}_x$$

$$\langle x_n x_{n+m}^* \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n+m}^* = \hat{\phi}_{xx}(m)$$

### **Transformada de Fourier de señales de energía infinita:**

Si bien la transformada de Fourier de señales de energía infinita no existe, las secuencias de auto-correlación y de auto-covarianza de dichas señales, sí tienen por lo general transformada de Fourier. La representación espectral de estos promedios juega un papel importante en la descripción de la relación entre la entrada y la salida de los sistemas lineales e invariantes cuando la entrada es una señal de energía infinita.

### **Propiedades de las secuencias de correlación y de covarianza:**

Consideremos dos procesos aleatorios estacionarios reales  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$ , con auto-correlación, auto-covarianza, cross-correlación y cross-covarianza dadas respectivamente por:

$$\phi_{xx}(m) = E\{x_n x_{n+m}\}$$

$$\gamma_{xx}(m) = E\{(x_n - m_x)(x_{n+m} - m_x)\}$$

$$\phi_{xy}(m) = E\{x_n y_{n+m}\}$$

$$\gamma_{xy}(m) = E\{(x_n - m_x)(y_{n+m} - m_y)\}$$

Donde  $m_x$  y  $m_y$  son los valores medios de los procesos. Las siguientes propiedades son fácilmente derivables por simple manipulación de sus definiciones:

Propiedad 1:

$$\gamma_{xx}(m) = \phi_{xx(m)} - m_x^2$$

$$\gamma_{xy}(m) = \phi_{xy(m)} - m_x m_y$$

Propiedad 2:

$$\phi_{xx}(0) = E\{x_n^2\} = \text{mean-square}$$

$$\gamma_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \text{varianza}$$

Propiedad 3:

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(m) &= \phi_{xx}(-m) \\ \gamma_{xx}(m) &= \gamma_{xx}(-m) \\ \phi_{xy}(m) &= \phi_{yx}(-m) \\ \gamma_{xy}(m) &= \gamma_{yx}(-m)\end{aligned}$$

Propiedad 4:

$$\begin{aligned}|\phi_{xx}(m)| &\leq \phi_{xx}(0) \\ |\gamma_{xy}(m)| &\leq \phi_{xx}(0) \\ |\phi_{xy}(m)| &\leq [\phi_{xy}(0)\phi_{yy}(0)]^{\frac{1}{2}} \\ \underline{|\gamma_{xy}(m)|} &\leq [\gamma_{xx}(0)\gamma_{yy}(0)]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

**Nota:**

Estas definiciones y nomenclaturas fueron tomadas del capítulo 8 del libro “Digital Signal Processing” de A. Oppenheim y R. Schaffer. Algunas de ellas difieren de las utilizadas en el curso de Análisis de Señales en Geofísica, por ejemplo:

Correlación cruzada:  $\phi_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n^* y_{n+m}$

Covarianza cruzada:  $\gamma_{xy}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n^* y_{n+m}$

No obstante ello los conceptos enunciados son igualmente válidos y los cambios que hay que efectuar para que las definiciones concuerden son obvios.

Tenga presente que habitualmente consideramos que trabajamos con señales cuyo valor medio es cero, es decir:

$$\langle x_n \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n = \hat{m}_x = 0$$

Con lo cual la única diferencia entre correlación y covarianza es la normalización 1/N.