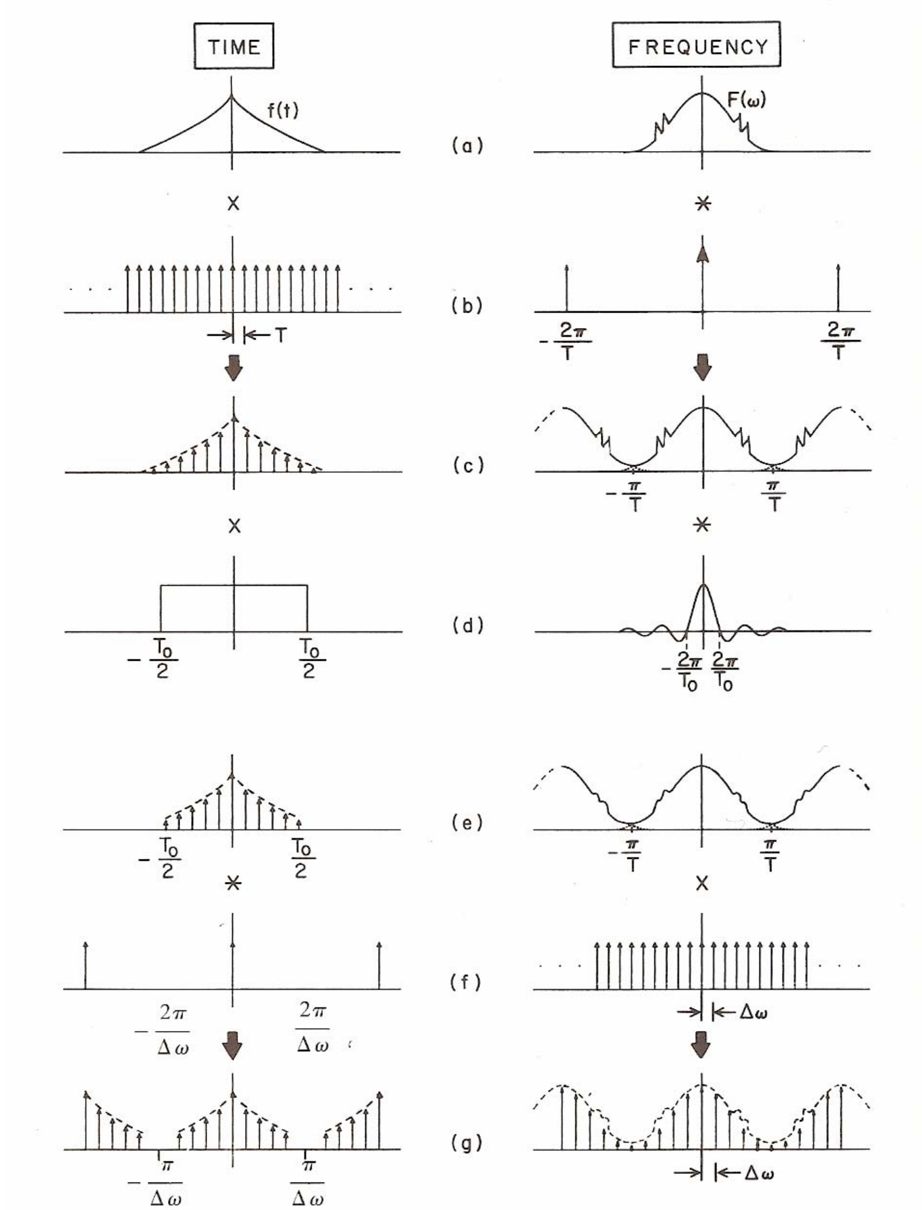
Consecuencias de Discretizar una Señal:

Muchas veces las señales discretas surgen de tomar muestras equidistantes de una señal analógica. Cualquiera sea la operación lineal e invariante que le apliquemos a nuestros datos, esta puede efectuarse mediante convolución en el dominio del tiempo o multiplicación en el dominio de las frecuencias. Es importante comprender las consecuencias en uno y otro dominio de discretizar los datos.

Analicemos el siguiente gráfico tomado del Karl:



- En la figura a) podemos ver la señal analógica y su espectro de amplitud antes de ser muestreada. La señal es de banda limitada y longitud limitada, lo cual nunca es totalmente cierto.
- En la figura b) vemos la función peine con un intervalo de muestreo Δt y su espectro de amplitud que es una sucesión infinita de impulsos $\frac{2\pi}{\Delta t}\delta(\Omega + \frac{2\pi}{\Delta t}k)$ cada $\frac{2\pi}{\Delta t}$.

- En la figura c) vemos la multiplicación de a) por b) en tiempo y la convolución de a) por b) en frecuencia, esto último produce replicas del espectro de amplitud cada $\frac{2\pi}{\Delta t}$ (Frecuencia de muestreo). Vemos que si el espectro de a) es más ancho que $\frac{\pi}{\Delta t}$ (Frecuencia de Nyquist) se produce un solapamiento entre réplicas, lo cual se conoce como *aliasing*. Esto puede ser evitado disminuyendo el intervalo de muestreo, lo cual aleja las réplicas. Sabemos por el *"teorema de tiempo limitado / banda limitada"*, que una señal de banda limitada tiene que ser infinita en tiempo por lo cual el *aliasing* se puede minimizar pero nunca se puede eliminar totalmente. La cola de los espectros es enmascarada por otros efectos, como por ejemplo el ruido, a tal punto que el *aliasing* puede llega a ser totalmente despreciable.
- En la figura d) vemos una función cajón de longitud T_0 y su respuesta en frecuencia, una función seno cardinal de ancho $\frac{4\pi}{T_0}$.
- En la figura e) vemos la señal en tiempo truncada por una función cajón, lo cual en frecuencia es una convolución por una función seno cardinal. La consecuencia de esta convolución con la función seno cardinal es un *semeared*, es decir se suaviza el espectro y se produce una pérdida de resolución. La resolución en frecuencia depende exclusivamente de la longitud de los datos. Una disminución del intervalo de muestreo separa las replicas y reduce el *aliasing*, pero no aumenta la resolución espectral. Además de limitar la resolución espectral, la convolución del espectro con la función seno cardinal tiene otro efecto. El lento decaimiento de los lóbulos laterales de la función seno cardinal mezcla la energía del espectro de una réplica con la de las réplicas vecinas. Esta mezcla es denominada *leakage*, y es diferente de la perdida de resolución que ocurre por la mezcla de energía de una misma réplica. A diferencia de la resolución, el *leakage* puede ser reducido disminuyendo el intervalo de muestreo porque aumenta la separación entre réplicas. Nunca vamos a poder ver el espectro verdadero de los datos, lo que podremos ver son estimadores de distinta calidad del espectro verdadero.
- El estimador del espectro de frecuencias debe ser calculado a partir de los datos discretos usando la transformada discreta de Fourier. Este muestreo en el dominio de las frecuencias es una multiplicación por una nueva función de muestreo o función peine que se puede observar en la figura f) con una distancia de muestreo en frecuencia de $\Delta\omega = \frac{2\pi}{M}$, donde M es la cantidad de muestras en frecuencia ya sea entre $-\pi$ y π, o entre 0 y 2π.
- En la figura g) puede verse el resultado de multiplicar en frecuencias e) con f) que es equivalente a convolucionar en tiempo e) con f) esto produce réplicas en tiempo cada M muestras, es decir que M tiene que ser mayor que N (La cantidad de muestras en tiempo) para que las réplicas en tiempo no se solapen. Nuevamente el muestreo en un dominio produce periodicidad o réplicas en el otro, con lo cual la periodicidad en tiempo y en frecuencia son inevitables. Para calcular la transformada discreta de Fourier en un número de frecuencias mayor que N todo lo que tenemos que hacer es agregarle ceros a la cola de la señal en tiempo, lo que habitualmente se denomina *"zero padding"*.