Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2016

Trabajo Práctico N° 7

Circulación, vorticidad y divergencia (1° parte)

1. Calcular la circulación alrededor de un cuadrado de 1000 km de lado (con los lados orientados N-S y E-O) en el cual se observa un campo de vientos del este cuya magnitud decrece hacia el norte 10 m/s cada 500 km. ¿Cuál es la vorticidad relativa media en el cuadrado? Determinar este valor a partir del encontrado para la circulación y a partir de la definición de vorticidad.

2. Calcular la tasa de cambio de la circulación alrededor de un cuadrado de 1000 km de lado en el plano horizontal sabiendo que la temperatura aumenta hacia el este 1 °C cada 200 km, y que la presión aumenta hacia el norte a razón de 1 hPa cada 200 km. Considerar que la presión en el vértice al sudoeste es 1000 hPa.

3. Considerar un centro de baja presión circular de 500 km de radio, situado sobre la Argentina, en el cual el flujo es tangencial a las curvas de nivel en el plano (x,y).
   a. Si en el borde exterior del centro de la baja la velocidad es 10 m/s, ¿cuál es el valor de la circulación relativa en este sistema?
   b. Analizar cómo cambiaría el valor hallado en a. si el perímetro del sistema tuviera la mitad de largo (considerando la misma velocidad del viento) y cómo variaría si en lugar de cambiar el largo del perímetro se duplica la velocidad.
   c. Para la situación considerada, determinar cómo es la relación entre la velocidad angular de una parcela y la circulación relativa en el sistema. ¿Cómo cambiaría la circulación si el sistema pasara a ser el de una alta presión?

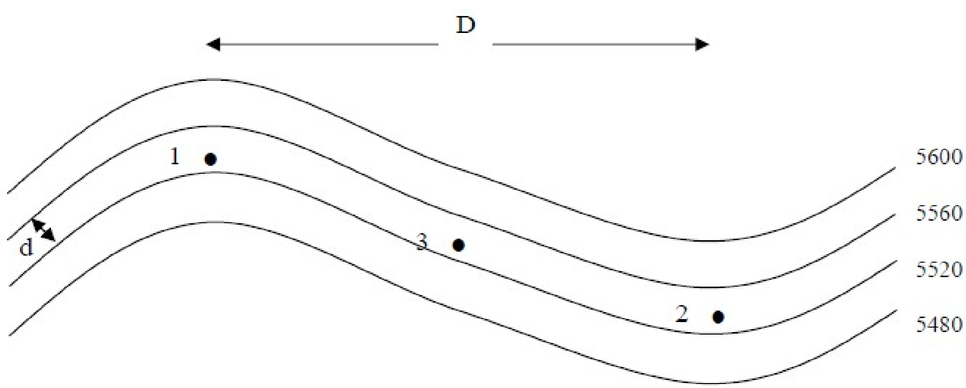
4. Una columna cilíndrica de aire de 100 km de radio, situada a 30° de latitud norte, se expande hasta alcanzar el doble de su radio original sin que en este proceso cambie la altura de la misma. Si el aire se encuentra inicialmente en reposo, determinar el valor de la vorticidad en el sistema. ¿Cuál es la velocidad tangencial media en el borde del sistema luego de la expansión?

5. Determinar la velocidad final de la brisa de mar 2 horas después de su iniciación si la circulación se extiende desde la superficie isobárica de 1000 hPa en superficie hasta 950 hPa sobre una distancia horizontal de 50 km. Considerar un gradiente horizontal de temperatura de 1°C/10 km y densidad constante de 1 kg/m^3.

6. Un sistema de baja presión que se desplaza sobre el paralelo de 40° S tiene la isobara de 1010 hPa a una distancia promedio de 400 km del centro. Calcular la variación de la circulación considerando que regionalmente existe un gradiente horizontal de presión hacia el S de 2 hPa cada 200 km y un gradiente horizontal de temperatura hacia el NE de 2°C cada 300 km.

7. Considerar un ciclón de 800 km de radio en el hemisferio norte, en cuyo extremo el viento es de 15 m/s. Si en las proximidades del extremo el movimiento es irrotacional, ¿cuánto vale el gradiente de velocidad allí? ¿Cambiaría el resultado si el ciclón se encontrara en el hemisferio sur?

8. En la Figura se presenta la configuración de isohipsas en el nivel de 500 hPa a una latitud de 45° S, en la que existe una separación constante d = 100 km.
   a. Indicar en la Figura los ejes de vaguada y cuña. Estimar la velocidad del viento en los puntos 1, 2 y 3 utilizando la aproximación geostrófica.
   b. ¿Qué causas pueden determinar la presencia de vorticidad relativa en esta configuración? Estimar el valor de ζ en los puntos 1, 2 y 3 considerando que en (3) las isohipsas son rectas, mientras en (1) y (2) el valor absoluto del radio de curvatura es de 450 km.
   c. ¿Hacia dónde apunta el gradiente de vorticidad relativa en el punto 3? Estimar este gradiente considerando la vorticidad en los puntos 1 y 2, y que la distancia entre ambos puntos es D = 1000 km.
   d. Calcular para el punto 3 el valor de la advección de vorticidad relativa debido al viento geostrófico. El valor obtenido indica advección de vorticidad ¿ciclónica o anticiclónica?



Respuestas

1. $C = -2 \times 10^7$ m²/s // $\zeta = -2 \times 10^{-5}$ s^{-1}
2. $dC/dt = -7{,}15$ m²/s²
3. a. $C_{rel} = 3{,}141 \times 10^7$ m²/s
   c. $\omega = C_{rel}/2\pi R^2$
4. $\zeta = -5{,}453 \times 10^{-5}$ s^{-1} / $V = -5{,}5$ m/s
5. $V = 5{,}25$ m/s
6. $dC/dt = 1{,}683$ m²/s²
7. $\partial V/\partial n = 1{,}875 \times 10^{-5}$ s^{-1}
8. a. $V_g = 3{,}88$ m/s
   b. $\zeta_1 = -8{,}64 \times 10^{-6}$ s^{-1} / $\zeta_2 = 8{,}64 \times 10^{-6}$ s^{-1} / $\zeta_3 = 0$
   c. $\nabla\zeta = 1{,}728 \times 10^{-11}$ m^{-1} s^{-1}
   d. $-Vg \cdot \nabla\zeta = -6{,}70 \times 10^{-11}$ s^{-2}

Marco teórico

Circulación: en términos matemáticos esta cantidad se define como:

$$C = \oint \overline{V} \cdot d\overline{l} = \oint (udx + vdy)$$

donde *dl* es el vector desplazamiento a lo largo del borde del elemento de fluido. Por convención, la integral cerrada se realiza en sentido antihorario, y resulta positiva (negativa) si la rotación es ciclónica (anticiclónica) en el hemisferio norte, siendo al revés en el hemisferio sur.

Si lo que se aplica es una velocidad absoluta, el resultado será una circulación absoluta (C_a); en consecuencia, las aceleraciones absolutas influirán en la variación temporal de C_a. En este último caso, sólo se aplican las aceleraciones debidas a fuerza gravitacional y gradiente de presión, de las cuales la primera no produce trabajo neto, por lo tanto:

$$\frac{dC_a}{dt} = -\oint \frac{dp}{\rho}$$

siendo el lado derecho de la igualdad llamado término *solenoidal*. Si el fluido es *barotrópico* (es decir, la densidad es función de la presión), puede demostrarse que este término es igual a cero y la circulación absoluta se conserva (*Teorema de circulación de Kelvin*).

En el estudio de fluidos suele tener mayor interés el cálculo de la componente *relativa* de la circulación. Ésta se obtiene sustrayendo de la circulación absoluta la componente debida a la *rotación terrestre*, la que para un área *A* puede expresarse del siguiente modo:

$$C_e = 2\Omega sen(\varphi) A = fA$$

Finalmente, la variación temporal de la *circulación relativa* resulta (*Teorema de Bjerknes*):

$$\frac{dC_{rel}}{dt} = \frac{dC_a}{dt} - \frac{dC_e}{dt} = -\oint \frac{dp}{\rho} - 2\Omega sen(\varphi) \frac{dA}{dt}$$

Vorticidad: es una cantidad vectorial definida como el rotor de la velocidad ($\overline{\upsilon} = \nabla \times \overline{U}$). En Meteorología resulta de interés la componente vertical de la vorticidad:

$$\eta = \hat{k} \times \overline{\upsilon}_a = \hat{k} \cdot \nabla \times \overline{U}_a \quad \text{(absoluta)} \quad / \quad \zeta = \hat{k} \times \overline{\upsilon} = \hat{k} \cdot \nabla \times \overline{U} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{(relativa)}$$

En coordenadas naturales, la vorticidad se expresa del siguiente modo:

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

donde el primer término se conoce como *vorticidad de curvatura*, y el segundo *como vorticidad de corte*.

Puede demostrarse que la circulación es la medida macroscópica de la vorticidad, por lo que ambas están relacionadas por el valor del área. Así, la vorticidad terrestre resulta igual al parámetro de Coriolis (*f*), y por lo tanto la vorticidad absoluta es:

$$\eta = \zeta + f$$