Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2016

Trabajo Práctico Inicial

Herramientas matemáticas útiles

1. Dados los vectores $\bar{A}=(-1,5,7)$, $\bar{B}=(3,0,-4)$ y $\bar{C}=(0,-6,-4)$ calcular:

   a. $\bar{A}+\bar{B}$ b. $\bar{B}+\bar{C}$ c. $(\bar{C}-\bar{B})\cdot 2$ d. $(\bar{A}+\bar{C})/2$

   En todos los casos hacer gráficos esquemáticos de las operaciones.

2. a. Demostrar en forma analítica las siguientes identidades:

      i. $\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})=-\bar{B}\cdot(\bar{A}\times\bar{C})$

      ii. $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})=\bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C})-\bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})$

   b. Verificar numéricamente las identidades del inciso a. considerando los vectores del ejercicio 1.

3. Considerar una variable vectorial A representada en un sistema cartesiano local (x,y,z) donde el eje de las x positivas apunta hacia el este, el eje de las y positivas hacia el norte y el eje de las z positivas hacia el cenit. Así, por ejemplo, si la variable tiene magnitud 1 y apunta hacia el norte, el vector que la representa es $\bar{A}=(0,1,0)$.

   Describir, sin realizar ningún cálculo, cómo varía un vector $\bar{C}=\bar{A}\times\bar{B}$, donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son vectores de magnitud 1, el primero fijo apuntando hacia el norte y el segundo con una orientación que va cambiando progresivamente en el sentido horario hasta completar los 360° de giro, partiendo desde el norte. Verificar numéricamente lo observado tomando algunas direcciones de $\bar{B}$ como ejemplo.

4. Dados el vector $\bar{A}=(xz,-y^2,2x^2y)$ y el campo escalar $\phi=x^2yz^3$, calcular:

   a. $\nabla\phi$ b. $\nabla^2\phi$ c. $\nabla\cdot\bar{A}$ d. $\nabla\cdot(\phi\bar{A})$ e. $\nabla\times\bar{A}$

5. Dados un vector $\bar{A}$ y un campo escalar ϕ, demostrar las siguientes identidades:

   a. $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A})=0$

   b. $\nabla\times(\nabla\phi)=0$

   c. $\nabla\cdot(\phi\bar{A})=\phi(\nabla\cdot\bar{A})+\bar{A}\cdot\nabla\phi$

6. Suponiendo que $\bar{A}_B$ representa la proyección del vector $\bar{A}$ sobre el vector $\bar{B}$ (es decir, la componente del vector $\bar{A}$ paralela al vector $\bar{B}$), demostrar la siguiente igualdad, identificando módulo y dirección del vector resultante:

$$\bar{A}_B=\frac{(\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{B}}{|\bar{B}|^2}$$

7. Suponer que la función $f(x) = \ln(1+x)$ describe una cierta magnitud física. Determinar cuál es el desarrollo en series de Taylor de *f* alrededor de $x = 0$. A partir de la expresión hallada, calcular (considerando una aproximación de segundo orden) el valor de la magnitud *f* en $x = 0.5$.

8. Considerar una función continua $f(x)$ y su desarrollo en series de Taylor alrededor de un punto x_0. Dados dos puntos cercanos a x_0, $x_1 = x_0 - \Delta x$ y $x_2 = x_0 + \Delta x$, comprobar que los valores de la derivada primera y la derivada segunda de *f* en x_0 pueden ser calculados en forma aproximada con las siguientes expresiones (lo que denominamos *aproximación de las derivadas en diferencias finitas centrada*):
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$
$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0-\Delta x)}{\Delta x^2}$$
<u>Nota:</u> en ambas expresiones han sido despreciados los términos que se encuentran multiplicados por Δx^2 y Δx^4, respectivamente.

9. En la siguiente tabla se detallan los valores que toma una cierta función *f* en algunos puntos del intervalo (-2.50, 2.50). Utilizando las expresiones halladas en el ejercicio anterior completar las columnas correspondientes al cálculo aproximado de *f´(x)* y *f´´(x)*, y graficar la función y sus derivadas. Sabiendo que la expresión analítica de función *f* es $f(x) = x^5 - 2x^3 + 7x^2$, calcular el valor de las derivadas en los puntos indicados en la tabla y comparar los resultados obtenidos.

Datos		**Aproximada**		**Analíticas**	
x	*f(x)*	*f´(x)*	*f´´(x)*	*f´(x)*	*f´´(x)*
-2,50	-22,66				
-2,25	0,55				
-2,00	12,00				
-1,75	15,74				
-1,50	14,91				
-1,25	11,79				
-1,00	8,00				
-0,75	4,54				
-0,50	1,97				
-0,25	0,47				
0,00	0,00				
0,25	0,41				
0,50	1,53				
0,75	3,33				
1,00	6,00				
1,25	10,08				
1,50	16,59				
1,75	27,13				
2,00	44,00				
2,25	70,32				
2,50	110,16				

Respuestas

1. a. $\overline{A}+\overline{B}=(2,5,3)$
   b. $\overline{B}+\overline{C}=(3,6,0)$
   c. $\left(\overline{C}-\overline{B}\right)\cdot 2=(-6,-12,0)$
   d. $\left(\overline{A}+\overline{C}\right)\big/2=(-1/2,-1/2,3)$ = (-1/2,-1/2, 3)

4. a. $\nabla\phi=(2xyz^3,x^2z^3,3x^2z^2)$
   b. $\nabla^2\phi=2y(z^3+3x^2z)$
   c. $\nabla\cdot\overline{A}=z-2y$
   d. $\nabla\cdot(\phi\overline{A})=3x^2yz^2(z^2-yz+2x^2y)$ $=3x^2yz^2(z^2 - yz + 2x^2y)$
   e. $\nabla\times\overline{A}=(2x^2,x(1-4y),0)$

7. $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ // $\ln(0{,}5)\approx 0{,}375$

9.

Datos		Aproximada		Analíticas	
x	**f(x)**	**f´(x)**	**f´´(x)**	**f´(x)**	**f´´(x)**
-2,50	-22,66	---	---	122,81	-268,50
-2,25	0,55	69,31	-188,22	66,27	-186,81
-2,00	12,00	30,38	-123,25	28,00	-122,00
-1,75	15,74	5,81	-73,28	4,02	-72,19
-1,50	14,91	-7,90	-36,44	-9,19	-35,50
-1,25	11,79	-13,81	-10,84	-14,67	-10,06
-1,00	8,00	-14,50	5,38	-15,00	6,00
-0,75	4,54	-12,06	14,09	-12,29	14,56
-0,50	1,97	-8,15	17,19	-8,19	17,50
-0,25	0,47	-3,94	16,53	-3,86	16,69
0,00	0,00	-0,12	14,00	0,00	14,00
0,25	0,41	3,06	11,47	3,14	11,31
0,50	1,53	5,85	10,81	5,81	10,50
0,75	3,33	8,94	13,91	8,71	13,44
1,00	6,00	13,50	22,63	13,00	22,00
1,25	10,08	21,19	38,84	20,33	38,06
1,50	16,59	34,10	64,44	32,81	63,50
1,75	27,13	54,81	101,28	53,02	100,19
2,00	44,00	86,38	151,25	84,00	150,00
2,25	70,32	132,31	216,22	129,27	214,81
2,50	110,16	---	---	192,81	296,50

Algunas definiciones

Elementos del cálculo vectorial

Dados dos vectores $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\bar{B} = (B_x, B_y, B_z)$, con un ángulo entre ellos igual a α, y un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$, se tienen las siguientes operaciones:

a) Suma: $\bar{A} + \bar{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

b) Producto:

b$_1$) Producto por un escalar: $k\bar{A} = (kA_x, kA_y, kA_z)$

b$_2$) Producto escalar: $\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\bar{A}||\bar{B}|\cos(\alpha)$

b$_3$) Producto vectorial: $\bar{A} \times \bar{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$,

cuya magnitud es $|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}||\bar{B}|\, sen(\alpha)$

c) Operador gradiente: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

c$_1$) Gradiente de un campo: $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

c$_2$) Divergencia de un vector: $\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

c$_3$) Rotor de un vector: $\nabla \times \bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$

c$_4$) Laplaciano de un campo: $\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

d) Operador invariante escalar: $\bar{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$

Desarrollo en series de Taylor

Dada una función continua $f(x)$, el valor de f en un punto x cercano a x_0 puede ser determinado en forma aproximada con la siguiente expresión polinómica:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

donde han sido despreciados los términos de orden mayor a n.