

Trabajo Práctico Inicial

Herramientas matemáticas útiles

1. a. Demostrar en forma analítica las siguientes identidades:
 - i. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$
 - ii. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
- b. Verificar numéricamente las identidades del inciso a. considerando los siguientes vectores: $\vec{A} = (-1, 5, 7)$, $\vec{B} = (3, 0, -4)$ y $\vec{C} = (0, -6, -4)$.
2. Considerar una variable vectorial A representada en un sistema cartesiano local (x, y, z) donde el eje de las x positivas apunta hacia el este, el eje de las y positivas hacia el norte y el eje de las z positivas hacia el cenit. Así, por ejemplo, si la variable tiene magnitud 1 y apunta netamente hacia el norte, el vector que la representa es $\vec{A} = (0, 1, 0)$. Describir, sin realizar ningún cálculo, cómo varía un vector \vec{C} que sea resultado del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, donde \vec{A} es un vector de magnitud 1 que apunta netamente hacia el norte y \vec{B} es también un vector de magnitud 1, pero cuya orientación va cambiando progresivamente en el sentido horario, partiendo desde el norte hasta completar los 360° de giro. Verificar numéricamente lo observado considerando que \vec{B} apunta a distintas direcciones en el espacio.
3. Dados el vector $\vec{A} = (xz, -y^2, 2x^2y)$ y el campo escalar $\phi = x^2yz^3$, calcular:
 - a. $\nabla \phi$
 - b. $\nabla^2 \phi$
 - c. $\nabla \cdot \vec{A}$
 - d. $\nabla \cdot (\phi \vec{A})$
 - e. $\nabla \times \vec{A}$
4. Dados un vector \vec{A} y un campo escalar ϕ , demostrar las siguientes identidades:
 - a. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
 - b. $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
 - c. $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla \phi$
5. Suponiendo que \vec{A}_B representa la proyección del vector \vec{A} sobre el vector \vec{B} (es decir, la componente del vector \vec{A} paralela al vector \vec{B}), demostrar la siguiente igualdad, identificando módulo y dirección del vector resultante:

$$\vec{A}_B = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$$

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera - 2015

6. Suponer que la función $f(x) = \ln(1+x)$ describe una cierta magnitud física. Determinar cuál es el desarrollo en series de Taylor de f alrededor de $x = 0$. A partir de la expresión hallada, calcular (considerando una aproximación de segundo orden) el valor de la magnitud f en $x = 0.5$.
7. Considerar una función continua $f(x)$ y su desarrollo en series de Taylor alrededor de un punto x_0 . Dados dos puntos cercanos a x_0 , $x_1 = x_0 - \Delta x$ y $x_2 = x_0 + \Delta x$, comprobar que los valores de la derivada primera y la derivada segunda de f en x_0 pueden ser calculados en forma aproximada con las siguientes expresiones (lo que denominamos *aproximación de las derivadas en diferencias finitas centrada*):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Nota: en ambas expresiones han sido despreciados los términos que se encuentran multiplicados por Δx^2 y Δx^4 , respectivamente.

8. En la siguiente tabla se detallan los valores que toma una cierta función f en algunos puntos del intervalo $(-2.50, 2.50)$. Utilizando las expresiones halladas en el ejercicio anterior completar las columnas correspondientes al cálculo aproximado de $f'(x)$ y $f''(x)$, y graficar la función y sus derivadas. Sabiendo que la expresión analítica de función f es $f(x) = x^5 - 2x^3 + 7x^2$, calcular el valor de las derivadas en los puntos indicados en la tabla y comparar los resultados obtenidos.

Datos		Aproximada		Analíticas	
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2,50	-22,66				
-2,25	0,55				
-2,00	12,00				
-1,75	15,74				
-1,50	14,91				
-1,25	11,79				
-1,00	8,00				
-0,75	4,54				
-0,50	1,97				
-0,25	0,47				
0,00	0,00				
0,25	0,41				
0,50	1,53				
0,75	3,33				
1,00	6,00				
1,25	10,08				
1,50	16,59				
1,75	27,13				
2,00	44,00				
2,25	70,32				
2,50	110,16				

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera - 2015

Algunas definiciones

Elementos del cálculo vectorial

Dados dos vectores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, con un ángulo entre ellos igual a α , y un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$, se tienen las siguientes operaciones:

a) Suma: $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

b) Producto:

b1) Producto por un escalar: $k\vec{A} = (kA_x, kA_y, kA_z)$

b2) Producto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha)$

b3) Producto vectorial: $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$,

cuya magnitud es $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\alpha)$

c) Operador gradiente: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

c1) Gradiente de un campo: $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

c2) Divergencia de un vector: $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

c3) Rotor de un vector: $\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$

c4) Laplaciano de un campo: $\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

d) Operador invariante escalar: $\vec{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$

Desarrollo en series de Taylor

Dada una función continua $f(x)$, el valor de f en un punto x cercano a x_0 puede ser determinado en forma aproximada con la siguiente expresión polinómica:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

donde han sido despreciados los términos de orden mayor a n .