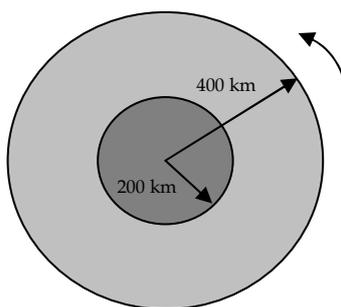


Trabajo Práctico N° 5

Circulación, vorticidad y divergencia

1. Considerar un centro de baja presión circular con un radio de 500 km, situado en el hemisferio norte, donde el flujo es tangencial a las curvas de nivel en el plano (x,y) .
 - a. Si la velocidad es 10 m/s a 500 km del centro de la baja, ¿cuál es la circulación relativa en este sistema?
 - b. Si el perímetro del sistema tuviera la mitad de largo, pero la velocidad del viento es la misma que en el inciso a., ¿cuánto varía la circulación? ¿Qué sucede si en lugar de cambiar el largo del perímetro se duplica la velocidad?
 - c. Si el sistema pasa a ser el de una alta presión, ¿cómo cambia la circulación?
 - d. ¿Cómo se relaciona el momento angular de una parcela con la circulación?
2. Calcular la circulación alrededor de un cuadrado de 1000 km de lado para un campo de vientos del este que decrece en magnitud hacia el norte 10 m/s cada 500 km. ¿Cuál es la vorticidad relativa media en el cuadrado?
3. Una columna cilíndrica de aire de 100 km de radio, situada en 30° N, se expande hasta alcanzar el doble de su radio original. Si el aire se encuentra inicialmente en reposo, determinar el valor de la vorticidad en el sistema. ¿Cuál es la velocidad tangencial media en el perímetro luego de la expansión?
4. Un sistema rotando en sentido antihorario contiene dos fluidos con diferentes colores, como se indica en la Figura. Considerando que la distribución de velocidad tangencial se expresa por la función $V = b/r$, donde $b = 10^6$ m²/s, ¿cuál es la vorticidad promedio en el disco de fluido oscuro y en el anillo de fluido de color claro? Verificar el último resultado utilizando la expresión de la vorticidad en coordenadas naturales en un punto ubicado dentro del anillo.

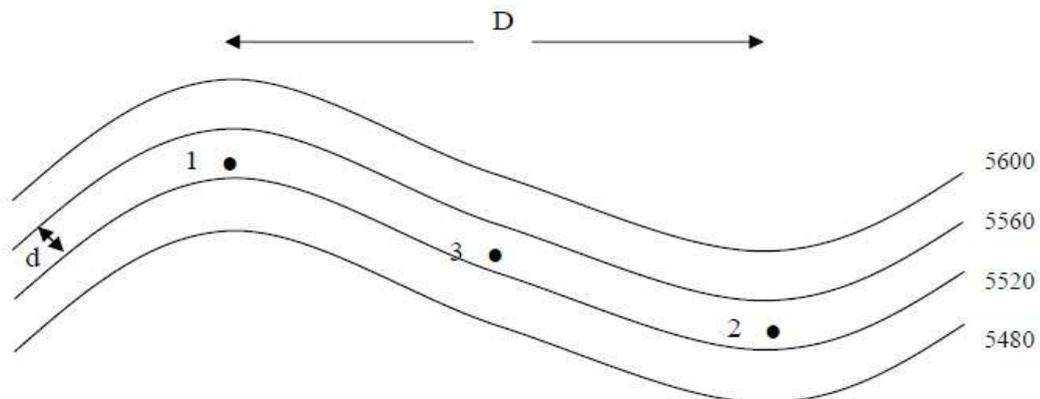


5. ¿Cuánto vale el gradiente de velocidad en un ciclón cerca de una línea de corriente ($R = 800$ km) si el movimiento es irrotacional y la velocidad es de 15 m/s?
6. Una columna de aire situada en 60° N con $\zeta = 0$ se extiende desde la superficie hasta una altura fija en la tropopausa, aproximadamente a 10 km. Si la columna de aire se mueve hasta ubicarse sobre una cadena montañosa de 2,5 km de altura situada a 45° N, ¿cuál es el valor de la vorticidad absoluta y la vorticidad relativa a medida que pasa el pico de la montaña? Asumir que el flujo satisface la ecuación de vorticidad potencial para flujo barotrópico.

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera - 2014

7. Calcular la tasa de cambio de la circulación alrededor de un cuadrado de 1000 km de lado en el plano horizontal sabiendo que la temperatura aumenta hacia el este 1 °C cada 200 km, y que la presión aumenta hacia el norte a razón de 1 hPa cada 200 km. Considerar que la presión en el vértice al sudoeste es 1000 hPa.
8. Una “teoría” muy popular es la que sugiere que en el hemisferio norte el agua circula en sentido antihorario a medida que se va por el drenaje mientras que en el hemisferio sur lo hace en sentido horario. A fin de analizar este fenómeno considerar un estanque situado a 45° de latitud norte con un drenaje en el centro que se abre, teniendo inicialmente agua en reposo. Luego de un cierto tiempo t , la velocidad tangencial a 1 cm del eje del drenaje es 0,5 cm/s
 - a. Si la rotación de la Tierra es la única responsable del remolino observado, y asumiendo que el roce puede despreciarse, ¿cuál habrá sido la distancia radial inicial del anillo de fluido observado a 1 cm a tiempo t ?
 - b. Suponer que en lugar de estar inicialmente en reposo, el agua tenía un pequeño remolino inicialmente rotando en sentido horario. A la distancia radial calculada en el inciso a., ¿qué tan grande debería haber sido la velocidad tangencial de este remolino para revertir el sentido de giro del vórtice?
 - c. ¿Qué puede concluirse acerca de la veracidad de esta teoría popular?
9. Un par de vórtices ciclónico y anticiclónico son observados en la atmósfera a una latitud de 43° N. Ambos vórtices tienen la misma vorticidad relativa promedio ($|\zeta| = 1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). Asumiendo que existe convergencia y divergencia horizontal uniforme asociadas con el ciclón y el anticiclón, respectivamente, y que persiste durante un día con la misma magnitud ($|\nabla \cdot \mathbf{V}| = 2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$), estimar el cambio en la vorticidad relativa del ciclón y el anticiclón. Interpretar el resultado hallado como una razón dinámica para explicar que la magnitud de la anomalía de presión a nivel del mar es mayor para ciclones extremos que para anticiclones extremos.
10. Dada la configuración de isohipsas en el nivel de 500 hPa que se presenta en la Figura, considerar que se ubica a una latitud aproximada de 45° S y que existe una separación constante entre isohipsas de 100 km.
 - a. Indicar en la Figura los ejes de vaguada y cuña. Estimar la velocidad del viento en los puntos 1, 2 y 3 utilizando la aproximación geostrófica.
 - b. ¿Qué efecto determina la presencia de vorticidad relativa en esta configuración? Justificar la respuesta. Estimar la vorticidad relativa en los puntos 1, 2 y 3 considerando que: *i*) en el punto 3 las isohipsas son rectas; *ii*) en los puntos 1 y 2 el valor absoluto del radio de curvatura es de 450 km.
 - c. ¿En qué dirección señala el gradiente de vorticidad relativa en el punto 3? Estimar este gradiente considerando la vorticidad en los puntos 1 y 2, y la distancia $D = 1000 \text{ km}$.

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera - 2014



Respuestas

1. a. $3,141 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$
 b. En el primer caso la C cae a la mitad, en el segundo se duplica.
 c. La circulación cambia de signo
 d.
2. $C = -2 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$ / $\zeta = -2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
3. $C = -6,853 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$ / $\zeta = 5,453 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
4. ζ (disco) = $5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ / ζ (anillo) = 0
5. $\partial V / \partial n = 1,875 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
6. $\zeta_{\text{fin}} = -8,4 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
7. $dC/dt = 7,15 \text{ m}^2/\text{s}^2$
8. a. $r(t_0) = 0,86 \text{ m}$
 b. $u(t_0) > 5,07 \times 10^{-5}$
9. ζ (ciclón) = $-2,41 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ / ζ (anticiclón) = $6,82 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
10. a. $v_g = 3,88 \text{ m/s}$
 b. $\zeta(1) = 8,64 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ / $\zeta(2) = -8,64 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ / $\zeta(3) = 0$
 c.

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera - 2014

Marco teórico

Circulación: la circulación se define como:

$$C = \oint \bar{V} \cdot d\bar{l} = \oint (u dx + v dy)$$

donde $d\bar{l}$ es el vector desplazamiento a lo largo del borde del elemento de fluido. Por convención, la integral cerrada se realiza en sentido antihorario, y resulta positiva (negativa) si la rotación es ciclónica (anticiclónica) en el hemisferio norte, siendo al revés en el hemisferio sur. En el caso de la Tierra, la circulación debida a la rotación terrestre alrededor de un área A puede expresarse del siguiente modo:

$$C_e = 2\Omega \text{sen}(\varphi) A = fA$$

La variación temporal de la circulación relativa queda expresada según el Teorema de Bjerknes:

$$\frac{dC_{rel}}{dt} = \frac{dC_a}{dt} - \frac{dC_e}{dt} = -\oint \frac{dp}{\rho} - 2\Omega \text{sen}(\varphi) \frac{dA}{dt}$$

donde el primer término del miembro derecho es el término de los solenoides. En caso de que el flujo sea barotrópico (es decir, la densidad sólo depende de la presión), el término de los solenoides resulta nulo.

Vorticidad: es una cantidad vectorial definida como el rotor de la velocidad ($\bar{v} = \nabla \times \bar{U}$). En Meteorología resulta de interés la componente vertical de la vorticidad:

$$\eta = \hat{k} \times \bar{v}_a = \hat{k} \cdot \nabla \times \bar{U}_a \quad (\text{absoluta}) \quad / \quad \zeta = \hat{k} \times \bar{v} = \hat{k} \cdot \nabla \times \bar{U} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{relativa})$$

En coordenadas naturales, la vorticidad se expresa del siguiente modo:

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

Donde el primer término representa se conoce como vorticidad de curvatura, y el segundo como vorticidad de corte. Puede demostrarse que la circulación es la medida macroscópica de la vorticidad, por lo ambas están relacionadas por el valor del área. Así, la vorticidad terrestre resulta igual al parámetro de Coriolis (f), por lo que:

$$\eta = \zeta + f$$

Vorticidad potencial: para parcelas en un flujo adiabático existe una cantidad que se conserva conocida como vorticidad potencial, y que en coordenadas isentrópicas tiene la siguiente expresión:

$$(\zeta_\theta + f) \left(-g \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) = cte$$

En el caso de un fluido homogéneo incompresible, la vorticidad potencial toma una expresión más simple, donde el cociente entre la vorticidad absoluta y el espesor del vórtice es constante:

$$\frac{(\zeta + f)}{H} = cte$$

Ecuación de vorticidad: en coordenadas cartesianas, esta ecuación vincula el cambio de la vorticidad absoluta con la suma de tres términos: el de la divergencia, el de la inclinación y el de los solenoides:

$$\frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

Si sólo actúa divergencia horizontal en el fluido, los dos últimos términos son nulos y existe una relación directa entre el cambio en la vorticidad y la divergencia.