

# Astronomía Extragaláctica 2025 – Práctica 1

## Marco Cosmológico

Datos auxiliares:

- `Gunn-Oke.txt`

1. Principio Cosmológico. ¿Qué es?

---

- 2.
- Encuentre la relación que vincula a la magnitud absoluta  $M$  de una galaxia con su magnitud aparente  $m$  y con el corrimiento al rojo  $z$  de su espectro.
  - Grafique  $V$  contra  $\log(z)$  para los datos de Gunn & Oke (ApJ, 1975, 195, 255), que corresponden a las galaxias más brillantes en cúmulos ricos de galaxias (archivo `Gunn-Oke.txt`, página de la materia<sup>1</sup>).

¿Es válida la relación encontrada en el inciso anterior? ¿Hace falta alguna otra hipótesis?

- Realice el mismo tipo de gráfico para los datos correspondientes al relevamiento 2MASS, que pueden descargarse desde el siguiente enlace: <http://tdc-www.harvard.edu/2mrs/>.

¿Puede ajustarse una función similar en este caso? ¿Por qué? Discutir las diferencias entre ambos gráficos.

Datos:  $c = 2.99792 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  ;  $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

---

3. Calcule las velocidades del “flujo de Hubble” que corresponden a:

<sup>1</sup><http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/extragalactica/practicas.html>

**M31:**  $(m - M)_0 = 24.47$  mag

**Cúmulo de Virgo**  $(m - M)_0 = 31.10$  mag

**Cúmulo de Coma**  $(m - M)_0 = 35.06$  mag.

El movimiento de grupos de galaxias y cúmulos de galaxias puede caracterizarse, principalmente, por dos parámetros: su velocidad sistémica (velocidad grupal) y la dispersión de velocidades interna del sistema (dinámica interna).

Los valores típicos de las dispersiones de velocidades radiales de las galaxias que se miden en grupos y en cúmulos son, respectivamente:

$$\sigma_{r,g} \sim 100 - 500 \text{ km s}^{-1}$$

$$\sigma_{r,c} \sim 700 - 1200 \text{ km s}^{-1}$$

Con esta información, ¿qué se puede concluir de los resultados obtenidos para M31, y los cúmulos de Virgo y Coma?

4. La Ley de Hubble-Lemaître indica que el Universo se está expandiendo. ¿Qué dice al respecto la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)? Considere la distancia propia entre dos objetos y obtenga la expresión de su velocidad relativa.

5. A partir de la expresión del factor de escala  $R(t)$  de un universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$R(t_e) = R(t_0) + (t_e - t_0) \frac{dR(t_0)}{dt} + \frac{1}{2} (t_e - t_0)^2 \frac{d^2R(t_0)}{dt^2}, \quad (1.1)$$

y de las definiciones de la constante de Hubble ( $H_0$ ) y del parámetro de desaceleración ( $q_0$ ):

$$H_0 \equiv H(t_0) = \frac{dR(t_0)}{dt} \frac{1}{R(t_0)} \quad (1.2)$$

$$q_0 \equiv - \frac{d^2R(t_0)}{dt^2} \frac{1}{R(t_0) H_0^2}, \quad (1.3)$$

encuentre una expresión para el corrimiento al rojo  $z$  en función de  $H_0$ ,  $q_0$ , y de la diferencia entre los tiempos de emisión y de observación ( $t_e - t_0$ ).

- ¿qué es el corrimiento al rojo y qué es el corrimiento al rojo cosmológico?
- $z$  es un indicador, ¿de qué?

Datos:  $z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} - 1$

6. Para un espectro de cuerpo negro, el número de fotones con frecuencias entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  en un volumen de espacio  $V(t)$  a un tiempo cósmico  $t$  está dado por:

$$dN(t) = \frac{8\pi\nu^2 V(t) d\nu}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{kT_r(t)}} - 1 \right)}. \quad (1.4)$$

Mostrar que a un tiempo cósmico posterior  $t'$  la distribución también corresponde a un cuerpo negro, aunque a una temperatura  $T_r(t') < T_r(t)$ .

7. ¿Cuáles son las tres evidencias observacionales claves que apoyan la idea de la teoría del Big Bang?

8. A partir de las ecuaciones de Friedman para la tasa de expansión y la aceleración en un universo dominado por materia y constante cosmológica (es decir, despreciando radiación):

$$\left( \frac{dR(t)}{dt} \right)^2 = -kc^2 + \frac{8\pi G\rho(t_0)R^3(t_0)}{3R(t)} + \frac{\Lambda R(t)^2}{3}; \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi G\rho(t_0)R^3(t_0)}{3R^2(t)} + \frac{\Lambda R(t)}{3} \quad (1.6)$$

se comenta en forma esquemática la evolución de  $R(t)$  para  $\Lambda < 0$ ,  $\Lambda = 0$ , y  $\Lambda > 0$ , considerando los 3 valores posibles del parámetro de curvatura ( $k = 0, k \pm 1$ ) en cada caso.

Considerar que en el instante actual el Universo se está expandiendo  $\Rightarrow \dot{R}(t_0) > 0$ .

$\Lambda < 0$ : según la Ec. 1.6,  $\ddot{R} < 0$  siempre, y existió un instante en el pasado tal que  $R \rightarrow 0 \Rightarrow |\ddot{R}| \rightarrow \infty \Rightarrow$  es el instante inicial ( $t = 0$ )  $\equiv$  singularidad.

De la Ec. 1.5,  $\forall k \exists R_{\max}$ , a partir del cual vale la rama negativa de la raíz  $\Rightarrow \dot{R} < 0 \Rightarrow$  la expansión se frena y revierte (contracción) hasta que el universo colapsa nuevamente a una singularidad (*Big Crunch*).

Mientras la ecuación de la aceleración indica que  $\ddot{R} < 0$ , la ecuación de la velocidad  $\dot{R}$  representa una parábola con coeficiente principal negativo  $\Rightarrow$  la función  $R(t)$  es parábola cóncava hacia abajo.

El valor de  $R_{\max}$ , y del  $t$  correspondiente, dependen del valor de  $k$ : para  $k = -1$  el  $R_{\max}$  es mayor y se alcanza más tarde que para  $k = 0$  y  $k = +1$ . Ver Figura a.

$\Lambda = 0$ : en este caso también  $\ddot{R} < 0$  siempre, con  $|\ddot{R}| \rightarrow \infty$  para  $R \rightarrow 0$ .

La evolución de  $R(t)$  cambia cualitativamente según  $k$ :

- $k = +1$ : sólo en este caso  $\exists R_{\max}$  y hay colapso. La función  $R(t)$  se comporta de la misma manera que en los casos  $\Lambda < 0$ .

- $k = 0$ :  $\dot{R}^2 > 0$ ,  $\dot{R} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  Es un caso límite: la expansión se va frenando pero requeriría tiempo infinito para detenerse totalmente. La ecuación de  $\dot{R}$  es una ecuación diferencial de variables separables, cuya solución indica que  $R \propto t^{\frac{2}{3}}$ , mientras que  $\dot{R} \propto R^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{R} \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$ .
- $k = -1$ :  $\dot{R} > 0$  siempre. La velocidad  $\dot{R} \rightarrow c$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Cuando  $t$  es suficientemente grande la velocidad de expansión tiende a la velocidad de la luz, con lo cual la función  $R(t)$  tiende a una recta de pendiente  $c$  ( $R \lesssim ct$ ). Sin embargo, la forma de la función  $R(t)$  cuando  $t \rightarrow 0$  es una curva (no es una recta) similar a los casos  $k = +1$  y  $k = 0$ .  
Ver Figura **b**.

$\Lambda > 0$ : la expansión está dominada por la densidad de materia cuando  $R(t)$  es pequeño, y por la constante cosmológica cuando  $R(t)$  es grande.  
O sea que  $\ddot{R} < 0$  para  $R \rightarrow 0$  y  $\ddot{R} > 0$  para  $R \rightarrow \infty$ .

La evolución de  $R(t)$  cambia cualitativamente según  $k$ :

- $k = -1 \vee k = 0$ :  $\dot{R}^2 > 0$  siempre  $\Rightarrow$  universo siempre en expansión. La expansión tiene aceleración negativa ( $\ddot{R} < 0$ ) cuando  $R(t)$  es pequeño y aceleración positiva ( $\ddot{R} > 0$ ) cuando  $R(t)$  es grande. O sea, en ambos casos hay un punto de inflexión.
- $k = +1$ : para  $R(t)$  intermedios domina la curvatura ( $k$ ); en este caso hay uno o dos valores de  $R(t)$  tal que  $\dot{R}^2 = 0$ . No más de dos, porque  $\dot{R}^2 > 0$  tanto para  $R \rightarrow 0$  como para  $R \rightarrow \infty$  (y la Ec. 1.6 tiene una sola raíz). Cuando la Ec. 1.5 tiene dos raíces, en  $R_1$  y  $R_2$ , los valores intermedios de  $R$  producen  $\dot{R}^2 < 0$ , y se descartan por carecer de sentido físico. La raíz única de la Ec. 1.5 la encontramos imponiendo la condición de que se anulen simultáneamente  $\dot{R}$  y  $\ddot{R}$ . Esto ocurre para

$$\Lambda_c = \frac{c^6}{(4\pi G \rho(t_0) R(t_0)^3)^2}, \quad R_c = \frac{4\pi G \rho(t_0) R(t_0)^3}{c^2}.$$

Se presentan diferentes escenarios, dependiendo del valor de  $\Lambda$ .

- $\Lambda = \Lambda_c$ :  $\Rightarrow \dot{R} \geq 0$ , con  $\dot{R} = 0$  para  $R = R_c$  (única raíz). Ver figura **c**.

Se pueden evaluar 3 casos para  $R$ :

- $R = R_c$ : universo estático (Einstein).
- $R < R_c$ :  $\Rightarrow \dot{R}^2 > 0 \wedge \ddot{R} < 0 \Rightarrow$  expansión indefinida, desacelerada;  $R$  se acerca asintóticamente a  $R_c$  (Eddington-Lemaître).
- $R > R_c$ :  $\Rightarrow \dot{R}^2 > 0 \wedge \ddot{R} > 0 \Rightarrow$  expansión indefinida, acelerada;  $R$  se aleja asintóticamente de  $R_c$ .

$\Lambda_c$  es el valor de  $\Lambda$  que anula simultáneamente las ecuaciones 1.5 y 1.6. Entonces, como  $\dot{R} = 0 \Rightarrow$  hay un mínimo en  $R$  (es un mínimo porque  $\dot{R} > 0$  tanto para valores de  $R(t)$  muy grandes como muy pequeños). Y  $\ddot{R} = 0 \Rightarrow$  hay también un mínimo en la tasa de expansión, pero en este caso, como  $R(t)$  es mínimo  $\Rightarrow \ddot{R} > 0$  siempre (domina el término con  $\Lambda$  en la Ec. 1.6). Es decir, este universo se va alejando asintóticamente de  $R_{\min}$  con expansión acelerada.

- $\Lambda > \Lambda_c$ :  $\Rightarrow \dot{R} > 0$  siempre (la Ec. 1.5 no tiene raíces).  $R(t)$  es siempre creciente, con un punto de inflexión. Puede haber una etapa larga de  $R \approx$  constante (universo cuasi estático, u “holgazán” —*loitering*—).

Entonces, si  $\Lambda$  es mayor que ese valor particular  $\Lambda_c$ ,  $\ddot{R} > 0$  siempre  $\Rightarrow$  la aceleración es siempre positiva y entonces  $\dot{R}^2 = 0$  corresponde a un mínimo (*Big Bounce*).

- $0 < \Lambda < \Lambda_c$ :  $\Rightarrow \dot{R}$  tiene dos raíces, en  $R_1$  y  $R_2 \Rightarrow \dot{R}^2 > 0$  para  $R < R_1$  y para  $R > R_2$ . De nuevo se presentan tres casos, dependiendo del valor de  $R$  con respecto a  $R_1$  y  $R_2$ :

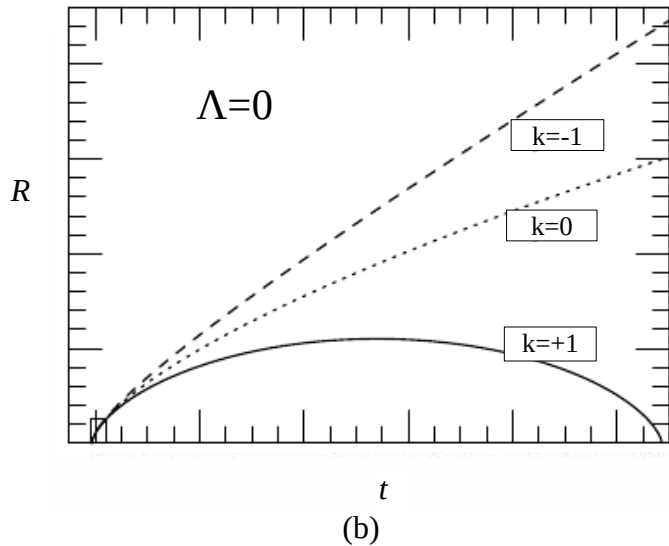
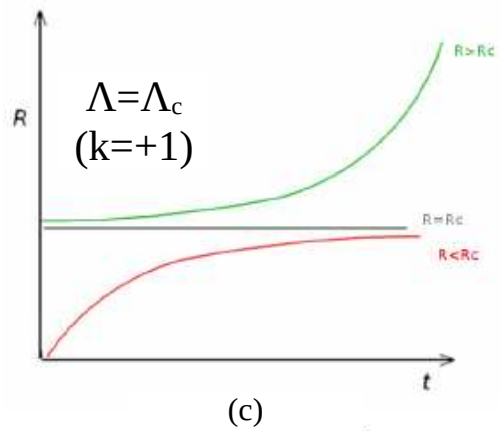
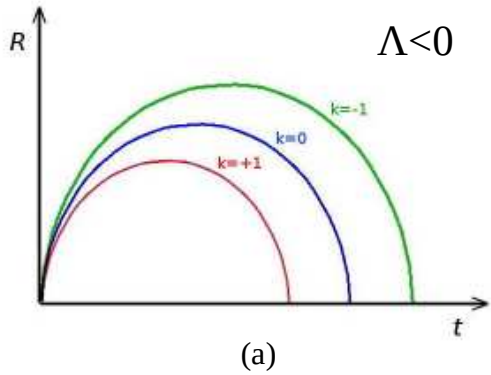
-  $0 < R \leq R_1$ :  $\Rightarrow \dot{R}^2 \geq 0 \wedge \ddot{R} < 0 \Rightarrow$  hay un máximo en  $R_1$  (otro caso de *Big Crunch*).

-  $R_1 < R < R_2$ :  $\Rightarrow \dot{R}^2 < 0 \Rightarrow$  no hay solución.

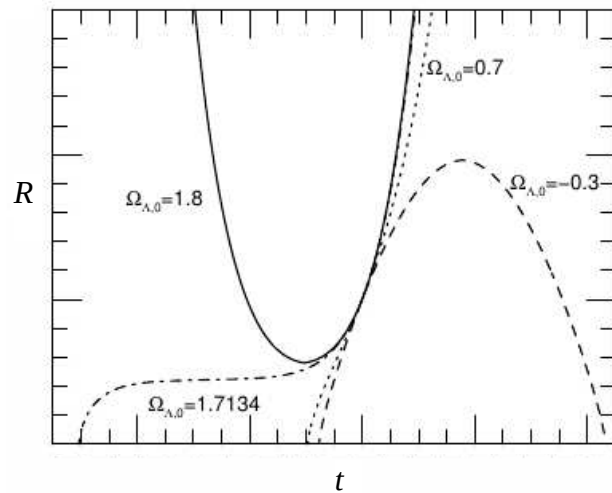
-  $R \geq R_2$ :  $\Rightarrow \dot{R}^2 \geq 0 \wedge \ddot{R} > 0 \Rightarrow$  hay un mínimo en  $R_2$  (*Big Bounce*).

Luego, si  $\Lambda$  es menor que ese valor particular  $\Rightarrow \ddot{R}$  cambia de signo, es decir:  $\ddot{R} < 0$  para  $R(t)$  pequeño y  $\ddot{R} > 0$  para  $R(t)$  grande. Ahora  $R(t)$  puede ser arbitrariamente chico (no hay mínimo), pero sí hay un punto de inflexión en  $\dot{R} = 0$ , que corresponde a expansión nula (universo estático); a ambos lados del punto de inflexión, la tasa de expansión es baja .

Ver figura **d**.



Adaptación de la Figura 6.1 de **Introduction to Cosmology** de Barbara Ryden



(d) Línea continua:  $0 < \Lambda < \Lambda_c$ ,  $R > R_2$  (*Big Bounce*).  
 Línea de trazos y puntos: universo holgazán (*loitering*).  
 Línea de puntos:  $\Lambda > \Lambda_c$ . Se obtiene el mismo tipo de curva para combinaciones  $\Lambda > 0$  y  $k=0$  y  $k=-1$ .  
 Línea de trazos:  $\Lambda > 0$  (*Big Crunch*)

Esta figura (aquí modificada) pertenece a **Introduction to Cosmology** de Barbara Ryden (Figura 6.4)