Astronomía Extragaláctica – Práctica 1

Marco cosmológico - Ley de Hubble

Archivos auxiliares:

- `Gunn-Oke.txt`
- `tabla-2MASS.txt`

1. Encuentre la relación que vincula a la magnitud absoluta M de una galaxia con su magnitud aparente m y con el corrimiento al rojo z de su espectro. Grafique V contra $\log(z)$ para los datos de Gunn & Oke (1975), que corresponden a las galaxias más brillantes en cúmulos ricos de galaxias (archivo `Gunn-Oke.txt`), y utilice la expresión hallada antes para ajustar los puntos del diagrama, suponiendo que las magnitudes absolutas de todas las galaxias son aproximadamente iguales.
   Realice el mismo tipo de gráfico para los datos obtenidos del catálogo 2MASS que se proporcionan en el archivo `tabla-2MASS.txt`. ¿Puede ajustarse una función similar en este caso? ¿Por qué? Comente.

   Datos:
   $c = 2.99792 \times 10^5\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
   $H_0 = 71\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$

---

2. Una hipótesis que se usó alguna vez para intentar explicar la relación de Hubble es la hipótesis de la *luz cansada*, que sostiene que el Universo no se expande, sino que al atravesar el espacio los fotones pierden energía (por algún mecanismo desconocido), de acuerdo a:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = -KE, \tag{1.1}$$

   donde K es una constante. Muestre que esta hipótesis conduce a una relación entre el corrimiento al rojo y la distancia similar a la Ley de Hubble para $z \ll 1$.
   ¿Qué valor debe tener K para obtener una constante de Hubble $H_0 = 70\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$?

---

3. A partir de la expresión del factor de escala de un universo de Friedmann-Robertson-Walker:

$$R(t_e) = R(t_0) + (t_e - t_0)\frac{dR(t_0)}{dt} + \frac{1}{2}(t_e - t_0)^2\frac{d^2R(t_0)}{dt^2}, \tag{1.2}$$

y de las definiciones de la constante de Hubble y del parámetro de desaceleración:

$$H_0 \equiv H(t_0) = \frac{dR(t_0)}{dt}\frac{1}{R(t_0)} \tag{1.3}$$

$$q_0 \equiv -\frac{d^2R(t_0)}{dt^2}\frac{1}{R(t_0)\,H_0^2}, \tag{1.4}$$

encuentre una expresión para el corrimiento al rojo z en función de H_0, q_0, y de la diferencia entre los tiempos de emisión y de observación $(t_e - t_0)$;

Datos:
$z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} - 1$

---

4. Suponga que usted es un ser bidimensional, viviendo en la superficie de una esfera de radio R. Un objeto de ancho $ds \ll R$ se encuentra a una distancia r de usted (recuerde que todas las distancias se miden sobre la superficie de la esfera).
¿Qué tamaño angular $d\theta$ medirá para ese objeto?
Explique el comportamiento de $d\theta$ a medida que $r \to \pi R$.

---

5. Suponga que usted *sigue siendo* el ser bidimensional del Ej. 4, viviendo sobre la misma esfera de radio R. Muestre que si usted traza una circunferencia de radio r, el valor de su perímetro es:

$$C = 2\pi R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right).$$

Suponga que la Tierra es una esfera perfecta de radio $R = 6371$ km. Si usted pudiera medir distancias con un error de ± 1 m, calcule el tamaño mínimo del círculo que debería dibujar sobre la superficie terrestre para convencerse de que la Tierra no es plana sino esférica.

---

6. En el espacio Euclídeo corriente, la distancia entre dos puntos, usando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) es:

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + \Delta z^2. \tag{1.5}$$

Si esos dos puntos yacen sobre la superficie de una esfera de radio R, vale

$$r^2 + z^2 = R^2. \tag{1.6}$$

Hallar la expresión de Δs^2 usando $\chi = r/R$. Comparar con la expresión de la métrica FRW y comentar.

---

7. A partir de las ecuaciones de Friedman para la tasa de expansión y la aceleración en un universo dominado por materia y constante cosmológica (es decir, despreciando radiación):

$$\left(\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -kc^2 + \frac{8\pi G\rho(t_0)R(t_0)^3}{3R(t)} + \frac{\Lambda R(t)^2}{3}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi G\rho(t_0)R(t_0)^3}{3R(t)^2} + \frac{\Lambda R(t)}{3}, \tag{1.8}$$

   a) grafique en forma esquemática la evolución de $R(t)$ para $\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$, y $\Lambda > 0$, considerando los 3 valores posibles del parámetro de curvatura ($k = 0$, $k \pm 1$) en cada caso;

   b) para el caso de constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$) y parámetro de curvatura $k = +1$, encuentre el valor de Λ requerido para que exista un radio mínimo $R_{\mathrm{min}} \neq 0$ a partir del cual el universo se empieza a expandir, y el valor de dicho radio mínimo.

---

8. En base a las ecuaciones 1.7 y 1.8 del ejercicio 7 encuentre los valores de la constante cosmológica (Λ) y del parámetro de curvatura (k) correspondientes a un universo estático.
¿Cuál es el valor de R para ese universo?

---

9. Calcule las velocidades del "flujo de Hubble" que corresponden a:

   M 31: $(m - M)_0 = 24.47$ mag

   Cúmulo de Virgo $(m - M)_0 = 31.10$ mag

   Cúmulo de Coma $(m - M)_0 = 35.06$ mag.

   Compare con las dispersiones de velocidades radiales de las galaxias que se miden en grupos ($\sigma_{r,\mathrm{g}} \sim 100 - 500$ km s^{-1}) y en cúmulos de galaxias ($\sigma_{r,\mathrm{c}} \sim 700 - 1200$ km s^{-1}), y comente.

---

10. Utilizando la "calculadora cosmológica" provista por N. Wright[1] grafique la edad del Universo (t_{e}) en función del corrimiento al rojo (z). Adopte un modelo estándar: $H_0 = 71$ km s^{-1} Mpc^{-1}, $\Omega_{\mathrm{M}} = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$.
Compare con la ecuación a 2$^{\mathrm{do}}$ orden:

$$t_0 - t_{\mathrm{e}} = \frac{1}{H_0}\left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)z^2\right]. \tag{1.9}$$

¿Cuál era la edad del Universo, en función de su edad actual, para $z = 1$?

---

[1] http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html

11. Para un espectro de cuerpo negro, el número de fotones con frecuencias entre ν y $\nu + \mathrm{d}\nu$ en un volumen de espacio $V(t)$ a un tiempo cósmico t está dado por:

$$\mathrm{d}N(t) = \frac{8\pi\nu^2\, V(t)\,\mathrm{d}\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT_{\mathrm{r}}(t)}} - 1\right)}.$$

Mostrar que a un tiempo cósmico posterior t' la distribución también corresponde a un cuerpo negro, aunque a una temperatura $T_{\mathrm{r}}(t') < T_{\mathrm{r}}(t)$.