Cátedra de Sistemas Estelares
Trabajo práctico Nº1: Binarias espectroscópicas

Desarrollo teórico para la obtención del cociente de masas a partir de las velocidades radiales en un sistema binario de líneas dobles (*SB2*)

Compilado por G. Ferrero[1]

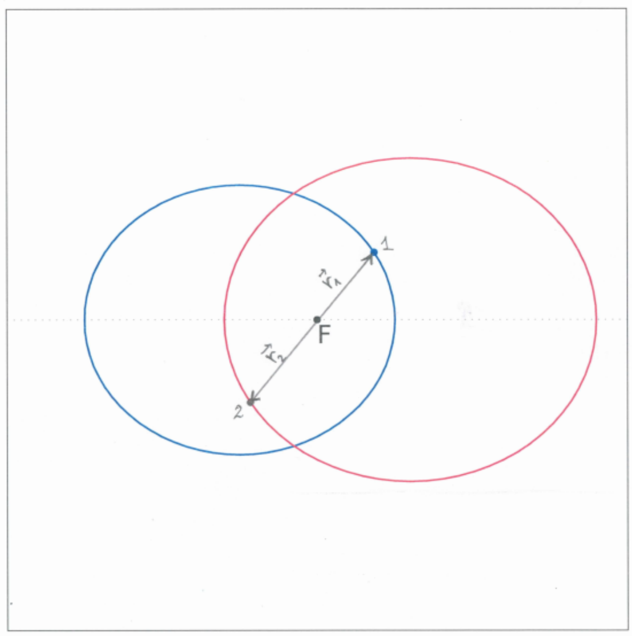

Figura 1: Órbita de las componentes primaria (roja) y secundaria (azul) de un sistema binario con centro de masa en **F**. **1** y **2** indican la posiciones de las estrellas en un instante determinado. Se muestran los vectores de posición en el marco de referencia del centro de masa.

A continuación se describe el fundamento teórico de un método muy simple, que se utilizaba frecuentemente hace varias décadas, para obtener el cociente de masas $\mu = M_2/M_1$, donde M_1 es la masa de la componente primaria y M_2 la masa que la secundaria. Este método resulta útil cuando se tiene un conjunto de medidas de las velocidades radiales ($V_{r,1i}$, $V_{r,2i}$) de las dos componentes de un sistema binario.

Se asume que se trate de un sistema de componentes separadas y que las medidas de velocidad radial representen la velocidad radial del centro de masa de cada una de las estrellas. Esto es válido usualmente cuando las dos componentes son estrellas de masa baja o intermedia, que están en la secuencia principal. Por tanto, las estrellas serán tratadas como masas puntuales.

Recordemos en primer lugar que si elegimos un marco de referencia con origen en el centro de masa del sistema binario (punto **F** en la Fig. 1), y en ese marco los vectores posición de las estrellas en un instante determinado son $\vec{r_1} = r_1\hat{e}_r$ y $\vec{r_2} = r_2\hat{e}_r$, por la definición de centro de masa se cumplirá que

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 \tag{1}$$

[1]El desarrollo siguiente fue realizado inicialmente por G.F. para explicar el método utilizado en el pasado en numerosos trabajos sobre estrellas binarias, y fue completado luego por el Dr. Favio Faifer en un apunte interno para los docentes de la cátedra.

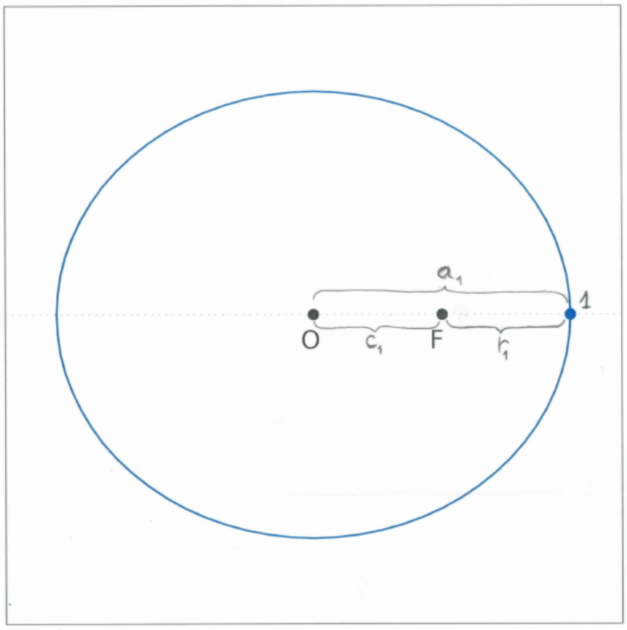

Figura 2: Elipse orbital de la componente primaria. **O** es el centro y **F** uno de los focos de la elipse, donde se encuentra el centro de masas. a_1 es el semieje mayor y $c_1 = ea_1$ es la distancia focal. Nótese que cuando la estrella está en el periastro $r_1 = a_1 - ea_1 = a_1(1-e)$.

Además, como uno de los focos de la elipse de cada órbita coincide con el centro de masa, por las propiedades geométricas de la elipse (ver Fig. 2), en el momento del paso por el periastro se cumplirá que

$$r_1 = a_1(1-e) \quad \text{y} \quad r_2 = a_2(1-e) \tag{2}$$

donde a_1 y a_2 son, respectivamente, el semieje mayor de la órbita de la primaria y de la secundaria y e es la excentricidad de las órbitas[2]. Por lo tanto utilizando (1) y (2) se puede calcular

$$\mu = \frac{M_2}{M_1} = \frac{a_1}{a_2} \tag{3}$$

Por otra parte, en la teoría se dedujo que las semiamplitudes de las curvas de velocidad radial se pueden expresar como

$$K_1 = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

y

$$K_2 = \frac{na_2 \sin i}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

donde $n = 2\pi/P$, con P período, es la velocidad angular media e i la inclinación de la órbita. Dividiendo las dos últimas igualdades miembro a miembro se tiene que

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{a_1}{a_2} \tag{4}$$

Y reemplazando (4) en (3) se obtiene

$$\mu = \frac{K_1}{K_2} \tag{5}$$

[2]Notemos que la excentricidad de ambas órbitas debe ser la misma.

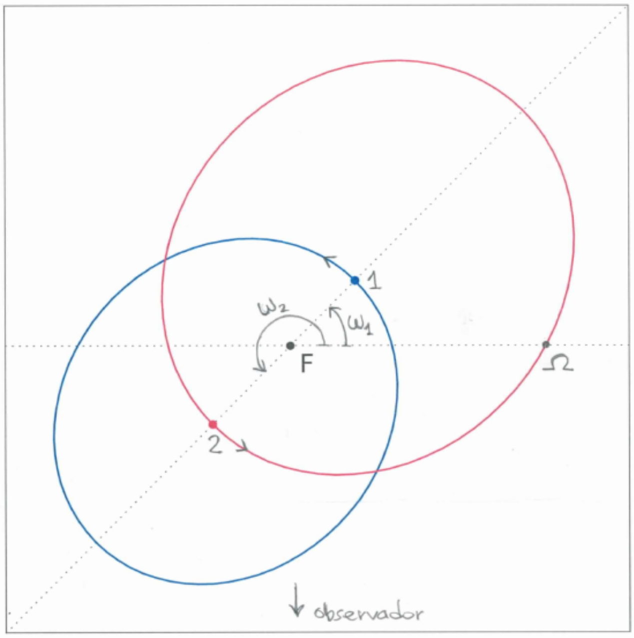

Figura 3: Posición de las estrellas en el paso por el periastro. El observador está hacia "abajo" y la línea punteada horizontal indica el plano del cielo. Ω indica el nodo ascendente. Nótese que $\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$

Adicionalmente, en la teoría ser obtuvieron las siguientes expresiones para las velocidades radiales:

$$V_{r,1} = K_1[\cos(\omega_1 + \nu) + e\cos\omega_1] + \gamma \tag{6}$$

y

$$V_{r,2} = K_2[\cos(\omega_2 + \nu) + e\cos\omega_2] + \gamma \tag{7}$$

donde, como ya se ha visto $\omega_{1,2}$ son las longitudes del periastro para la primaria y secundaria respectivamente, y γ es la velocidad radial del baricentro del sistema (también llamada "velocidad baricentral" o "velocidad sistémica").

De la geometría de las órbitas (ver Fig. 3) se desprende que

$$\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$$

y por tanto

$$\cos(\omega_2 + \nu) = cos(\omega_1 + 180^\circ + \nu) = -\cos(\omega_1 + \nu).$$

Análogamente:

$$\cos\omega_2 = \cos(\omega_1 + 180^\circ) = -\cos\omega_1$$

Reemplazando estas dos últimas expresiones en (7) se obtiene

$$V_{r,2} = K_2[-\cos(\omega_1 + \nu) - e\cos\omega_1] + \gamma$$

o bien

$$V_{r,2} - \gamma = -K_2[\cos(\omega_1 + \nu) + e\cos\omega_1]$$

Y utilizando aquí la expresión (5), resulta

$$V_{r,2} - \gamma = -\frac{K_1}{\mu}[\cos(\omega_1 + \nu) + e\cos\omega_1]$$

Pero de la ec. (6) sabemos que

$$V_{r,1} - \gamma = K_1[\cos(\omega_1 + \nu) + e\cos\omega_1]$$

y reemplazando esta expresión en la anterior resulta

$$V_{r,2} - \gamma = -\frac{(V_{r,1} - \gamma)}{\mu}$$

Operando, esta ecuación se puede llevar a la forma

$$V_{r,1} = \mu(-V_{r,2}) + \gamma(1 + \mu)$$

Es decir, que existe una relación lineal simple entre $V_{r,1}$ y $V_{r,2}$. Por tanto, si se representan gráficamente los valores medidos $V_{r,1i}$ y $V_{r,2i}$ en cada instante de tiempo, debería notarse una dependencia fuertemente lineal entre ambas variables. Ajustando una recta a los puntos de dicho gráfico, los coeficientes de la recta ajustada permiten obtener fácilmente μ y γ.