

## Desarrollo teórico para la obtención de la inclinación de la órbita de un sistema eclipsante tipo Algol

Compilado por G. Ferrero<sup>1</sup>

Antes de comenzar el desarrollo teórico que se utilizará en esta práctica, es necesario recordar algunos conceptos básicos. En primer lugar, recordemos que llamamos *tránsito* al fenómeno que se produce cuando un cuerpo celeste pasa entre el observador y otro cuerpo celeste más grande. En nuestro caso, en palabras pobres, un tránsito se da cuando “la estrella más chica está adelante”. En el caso que estudiaremos, las dos estrellas del sistema binario son estrellas de secuencia principal, y por tanto asumiremos que la estrella más grande es además la que emite mayor flujo. Durante el tránsito se tendrá la mayor caída en el brillo del sistema, es decir, el mínimo principal, o *el eclipse más profundo*, que llamamos *primario* (ver Fig. 1).

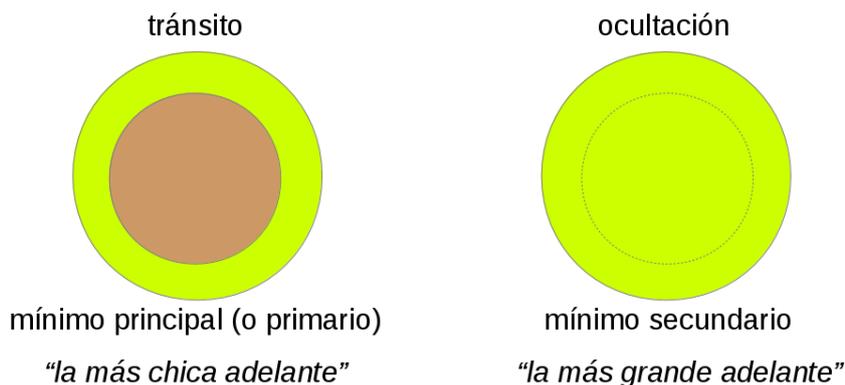


Figura 1: Tránsito y ocultación.

Llamamos *ocultación* al fenómeno que ocurre cuando un cuerpo es ocultado totalmente por otro, que pasa entre el observador y el primer cuerpo. En nuestro caso, dado que las estrellas se encuentran las dos aproximadamente a la misma distancia, asumiremos que la ocultación se produce cuando la estrella más grande pasa por delante de la más pequeña. Como además asumimos que la estrella más grande es la que emite un mayor flujo, la caída de brillo del sistema durante la ocultación será menor que durante el tránsito. Es decir que se produce durante el mínimo secundario, o *eclipse menos profundo*, que llamamos *secundario*.

Recordemos: **llamamos eclipse primario al mínimo principal**, que corresponde al tránsito de la estrella más pequeña delante de la más grande. Inversamente, **llamamos eclipse secundario al mínimo secundario** que corresponde a la ocultación de la estrella más pequeña por la más grande.

---

<sup>1</sup>El desarrollo siguiente fue compilado a partir de los apuntes utilizados por los docentes de la cátedra desde hace bastante tiempo, recibidos oportunamente del Dr. Favio Faifer, y completados en algunos puntos con desarrollos personales de G.F. En su conjunto, reflejan los aspectos básicos de la metodología utilizada por J. E. Merrill – y otros autores citados por él– para el cálculo de sus *Tables for solution of light curves of eclipsing binaries* (?).

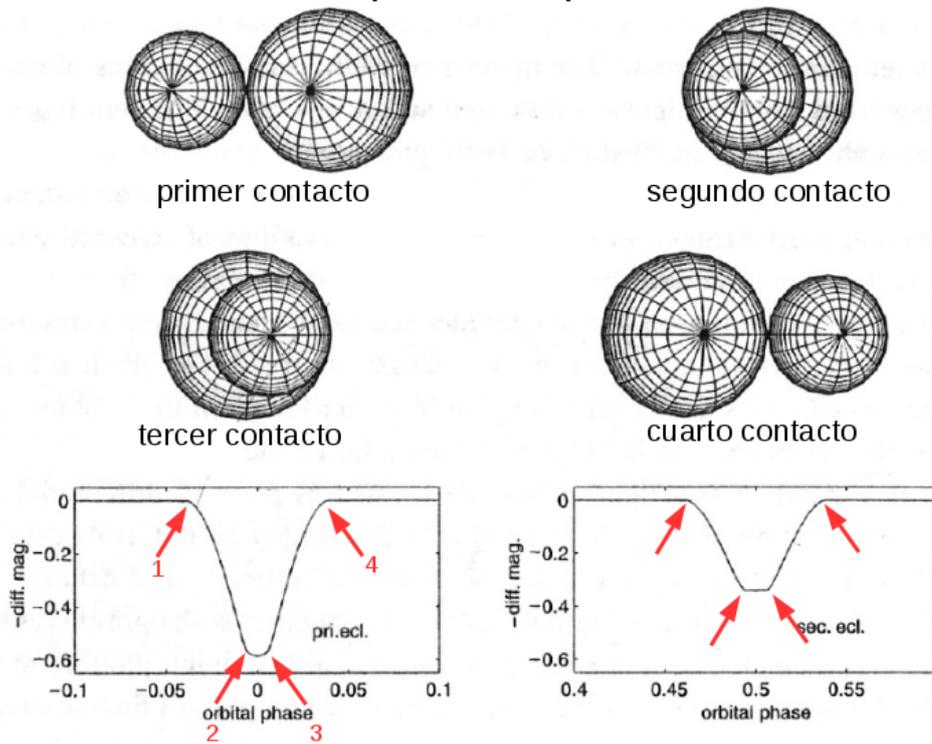


Figura 2: Contactos en un eclipse. Figura tomada de ?.

Además llamamos llamamos respectivamente primer, segundo, tercer y cuarto contactos a las fases  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  y  $\phi_4$  de un eclipse representadas en la Fig. 2.

Por otra parte, para el desarrollo teórico necesario para analizar la luz de una binaria eclipsante tipo Algol ( $\beta$  Per, o “de componentes separadas”), definimos las siguientes variables (ver Fig. 3):

- unidad de longitud:  $a$  semieje mayor de la órbita relativa de las dos estrellas (si es una circunferencia será su radio);
- radios de las estrellas:  $r_g$  radio de la estrella primaria y  $r_s$  radio de la secundaria;
- cociente de los radios:  $k = r_s/r_g$  ;
- unidad de área:  $\pi r_s^2$  área del disco de la estrella más pequeña;
- área oscurecida de la estrella primaria (en unidades  $\pi r_s^2$ ):  $\alpha$  ;
- unidad de intensidad:  $I_t = I_s + I_g$ , suma de las intensidades de las dos estrellas, donde  $I_s$  es la intensidad de la primaria y  $I_g$  la de la secundaria;
- distancia instantánea proyectada entre los centros de las dos estrellas:  $\delta(t)$

Suponemos también que se cumplen las siguientes hipótesis:

- las **órbitas** de ambas estrellas, y por tanto también la órbita relativa, son **circulares** ( $e = 0$ ). Entonces, los eclipses están separados por un intervalo de tiempo igual a  $P/2$  (o por un intervalo de fase  $\Delta\phi = 0,5$ ) y la velocidad tangencial orbital es constante y vale  $v_t$ ;

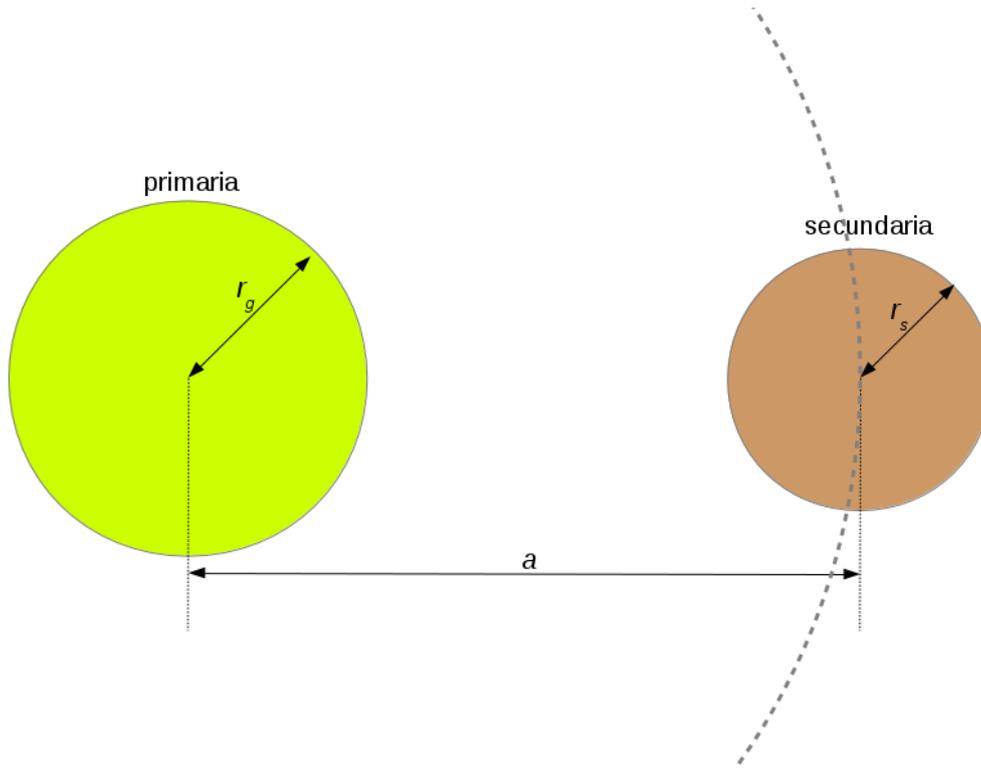


Figura 3: Dimensiones del sistema (radios y semieje mayor de la órbita relativa).

- el **brillo superficial por unidad de área es uniforme** sobre todo el “disco” de cada estrella (no hay oscurecimiento al limbo) y por tanto la pérdida de luz durante un eclipse es directamente proporcional al área cubierta de la estrella que está detrás;
- las **estrellas son esféricas**, por lo tanto fuera de los eclipses el brillo es constante;
- **no hay aumento de brillo** por calentamiento ni por reflexión recíproca.

Obtención del cociente de radios  $k = r_s/r_g$

Veremos dos maneras de estimar  $k$ : una utilizando las intensidades durante los eclipses y otra usando las fases de los contactos. La primera utiliza las intensidades (ver Fig. 4).

La diferencia entre el brillo total del sistema y el brillo durante el eclipse primario ( $I_1$ ) es proporcional al área de la estrella primaria que queda tapada por la secundaria, por lo tanto

$$1 - I_1 = \frac{I_g}{\pi r_g^2} \pi r_s^2 = I_g \left( \frac{r_s}{r_g} \right)^2 = I_g k^2,$$

de donde

$$I_g = \frac{1 - I_1}{k^2} \quad (1)$$

Mientras que en el eclipse secundario no se ve la componente secundaria, por lo tanto la diferencia entre el brillo total del sistema y el brillo durante el eclipse secundario ( $I_2$ ) es igual al brillo de la secundaria. O sea que

$$1 - I_2 = I_s, \quad (2)$$

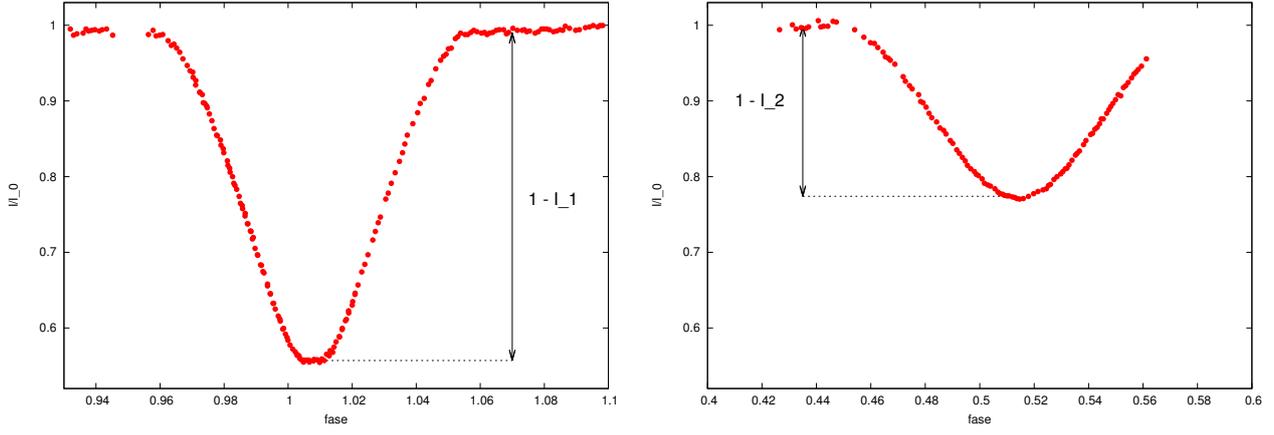


Figura 4: Ejemplos de eclipses y sus profundidades.

pero en la unidad de intensidad definida,  $I_s + I_g = 1$ , por lo tanto de (1) y (2) resulta

$$(1 - I_2) + \left( \frac{1 - I_1}{k^2} \right) = 1$$

$$(1 - I_2)k^2 + (1 - I_1) = k^2$$

$$1 - I_1 = k^2(1 - 1 + I_2)$$

$$k^2 = \frac{1 - I_1}{I_2}$$

y por lo tanto

$$k = \sqrt{\frac{1 - I_1}{I_2}}.$$

Ahora, estimaremos  $k$  usando las fases de los contactos.

Suponiendo que  $T_0 = 0$ ,  $0 \leq t \leq P$  y llamando  $t_i$  a las fases de los contactos, de la Fig. 5 del eclipse primario se ve que:

$$v_t(t_4 - t_1) = 2r_s + 2r_g$$

y que

$$v_t(t_3 - t_2) = 2r_g - 2r_s,$$

de donde

$$\frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_2} = \frac{r_s + r_g}{r_g - r_s}.$$

Pero como en este caso  $\phi_i = t_i/P$ , dividiendo por  $P$  el numerador y el denominador del primer miembro de la igualdad anterior se obtiene

$$\frac{\phi_4 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2} = \frac{r_s + r_g}{r_g - r_s}$$

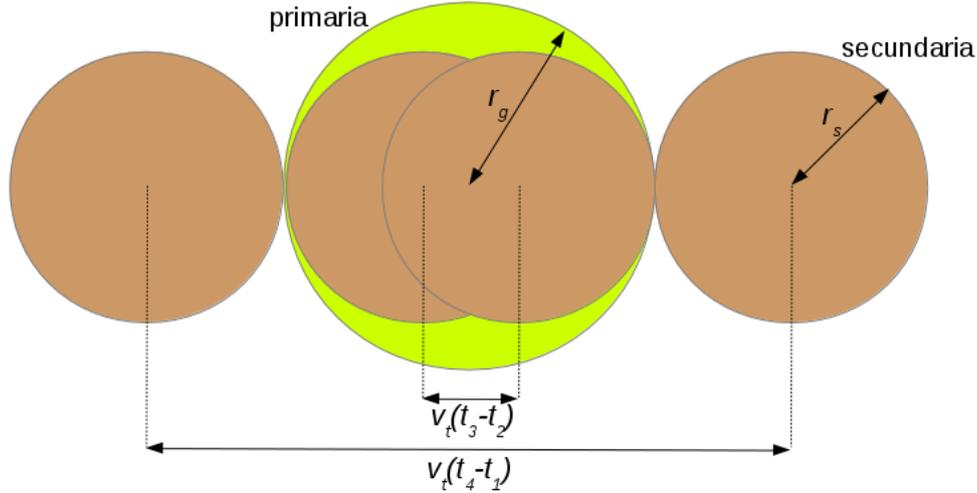


Figura 5: Duración de los eclipses.

y dividiendo allí numerador y denominador del segundo miembro por  $r_g$  resulta

$$\frac{\phi_4 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2} = \frac{\frac{r_s + r_g}{r_g}}{\frac{r_g - r_s}{r_g}} = \frac{k + 1}{1 - k}$$

de donde, multiplicando los extremos de la igualdad se tiene

$$(\phi_4 - \phi_1)(1 - k) = (\phi_3 - \phi_2)(k + 1)$$

y despejando se obtiene

$$k = \frac{\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4}{\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4}.$$

Obtención de la relación entre el área del sistema “ocultada”  $\alpha(t)$ , la distancia proyectada entre los centros de las componentes  $\delta(t)$  y la inclinación orbital  $i$

Ahora veremos cómo relacionar el área ocultada de la estrella que está detrás, durante un tránsito o una ocultación, con la distancia proyectada entre los centros de las estrellas y la inclinación del plano orbital (ver Fig. 6). Recordemos la hipótesis inicial según la cual la pérdida de brillo del sistema es directamente proporcional al área ocultada, o sea que

$$\forall t : \alpha(t) \propto [1 - I(t)]$$

y en particular en  $T_0$  (punto medio del eclipse primario<sup>2</sup>)

$$\alpha(T_0) \propto (1 - I_1)$$

Por lo tanto dividiendo miembro a miembro las igualdades anteriores se obtiene

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha(T_0)} = \frac{1 - I(t)}{1 - I_1}$$

<sup>2</sup>Cuando se estudia binarias eclipsantes, suele tomarse la época de las efemérides ( $T_0$ ) en el punto medio del mínimo principal.

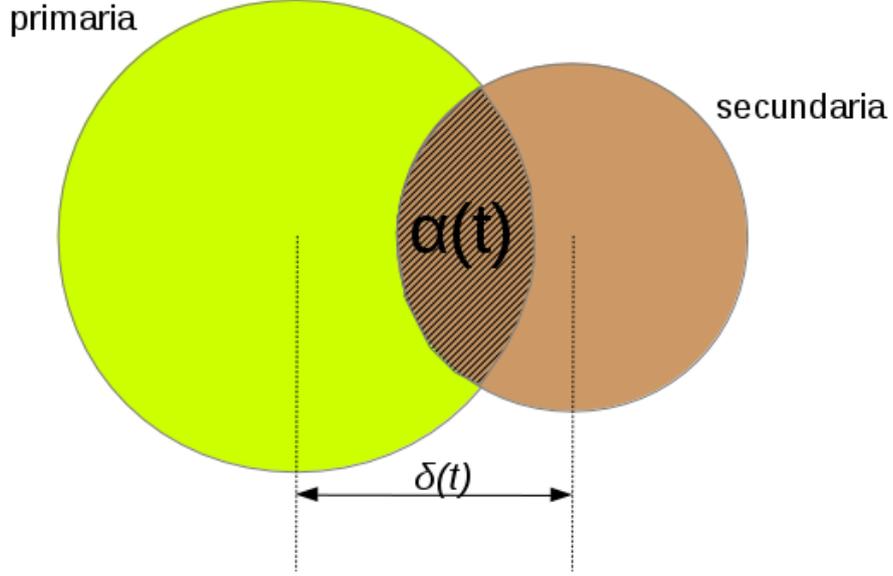


Figura 6: Área ocultada y distancia proyectada entre los centros de las estrellas.

pero como nuestra unidad de área es el área de la secundaria, y durante el eclipse primario el área ocultada es justamente la de la secundaria, entonces  $\alpha(T_0) = 1$  nos queda

$$\alpha(t) = \frac{1 - I(t)}{1 - I_1}$$

O bien, si llamamos  $\alpha_i \equiv \alpha(t_i)$  e  $I_i \equiv I(t_i)$ , donde  $t_i$  son los instantes de las observaciones e  $I(t_i)$  las intensidades medidas

$$\alpha_i = \frac{1 - I_i}{1 - I_1}$$

y por lo tanto podemos calcular  $\alpha_i$  para cada dato fotométrico.

Luego, de la geometría (Fig. 8) podemos ver que

$$\alpha = \frac{A_1 + A_2}{\pi r_s^2} \quad (3)$$

donde

$$A_1 = 2 \left( \frac{\varphi_1 r_g^2}{2} \right) - \frac{2(r_g \sin \varphi_1)(r_g \cos \varphi_1)}{2}$$

$$A_1 = \varphi_1 r_g^2 - r_g^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (4)$$

y

$$A_2 = \varphi_2 r_s^2 - r_s^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \quad (5)$$

Por otra parte, también de la geometría se ve que

$$\delta = r_g \cos \varphi_1 + r_s \cos \varphi_2 \quad (6)$$

o sea, que

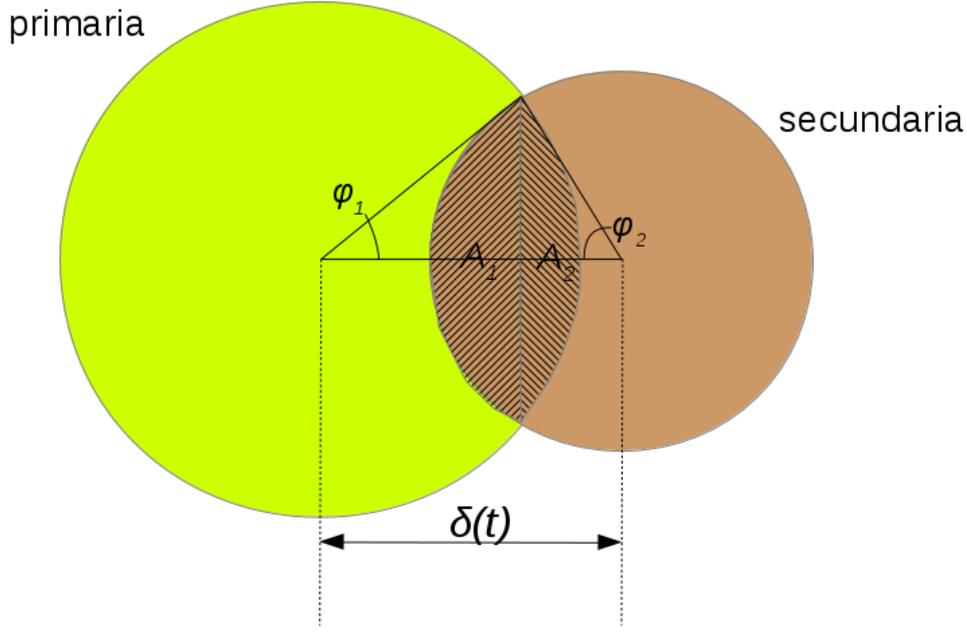


Figura 7: Ángulos para el cálculo del área ocultada.

$$\frac{\delta}{r_g} = \cos \varphi_1 + k \cos \varphi_2 \quad (7)$$

Y también de la geometría se obtiene que

$$r_g \sin \varphi_1 = r_s \sin \varphi_2 \quad (8)$$

o que

$$\sin \varphi_1 = k \sin \varphi_2 \quad (9)$$

Sumando (4) y (5), usando (8) y (7), y reemplazando (3), se obtiene que

$$k^2 \varphi_2 + \arcsen(k \sin \varphi_2) - k \sin \varphi_2 \left( k \cos \varphi_2 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2} \right) - \alpha \pi k^2 = 0$$

Nótese que en esta última ecuación, para un sistema dado,  $k$  es fijo, mientras que  $\alpha$  varía con el tiempo durante el eclipse. Pero para cada valor de  $\alpha$ , durante ese eclipse, debe existir un sólo  $\varphi_2$  que anule el lado izquierdo. Se trata por tanto de encontrar la, o las, raíces de la función del lado izquierdo.

Para eso, definamos una variable  $x \equiv \varphi_2$ , y sea

$$f(x) = k^2 x + \arcsen(k \sin x) - k \sin x \left( k \cos x + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \right) - \alpha \pi k^2$$

Nótese que durante un eclipse, entre el tercer y el cuarto contacto (o entre el primero y el segundo) debe cumplirse  $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$ , o sea que  $0 \leq x \leq \pi$ . Además, en ese intervalo  $f'(x) > 0$ , por tanto  $f(x)$  tiene una sola raíz en él. Por otro lado, es fácil ver que  $f(0) = -\alpha \pi k^2 < 0$  y que  $f(\pi) = \alpha \pi k^2 > 0$ . Es sencillo por tanto encontrar esa raíz usando un método de bisección.

Entonces, teniendo un  $k$  estimado para el sistema y un valor  $\alpha_i$  de la tabla, resolviendo  $f(x) = 0$  se tiene su correspondiente  $\varphi_{2,i}$ . Luego, usando (9) se puede calcular  $\varphi_1$ , y usando (7) se tendrá  $(\delta/r_g)_i$ . Eso es lo que hace el programa `drg2.f`

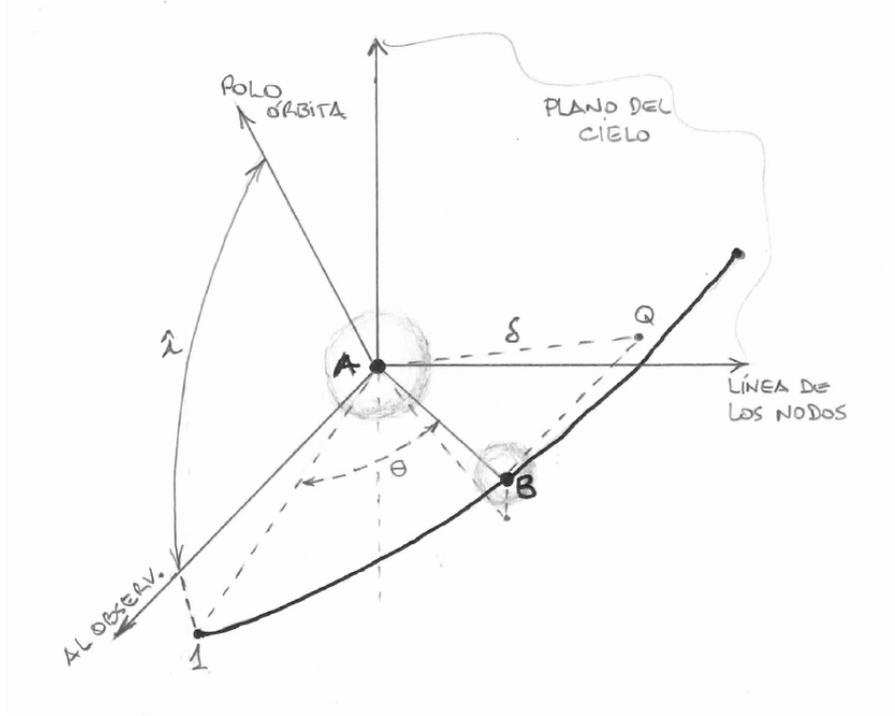


Figura 8: Geometría de la órbita. A: centro de la primaria; B: de la secundaria. Por tanto  $a = \overline{AB}$ . Cuando la secundaria está en el punto 1, punto medio del mínimo principal, será  $t = T_0$ .

Tenemos por tanto una forma de calcular  $(\delta/r_g)$  para cada valor observacional de  $\alpha$ .

Por otra parte, notemos que si medimos la fase orbital  $\phi$  de la estrella secundaria sobre la órbita relativa a partir del instante central del eclipse primario, la distancia entre los centros de las dos estrellas, proyectada en la dirección de nuestra línea de vista, estará dada por:

$$\delta = a \operatorname{sen} \phi, \quad (10)$$

donde  $a = 1$  por las definiciones iniciales. Por la geometría de la órbita (ver Fig. ) se cumplirá que

$$\cos \phi = \cos i \cos(\pi/2) + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\pi/2) \cos \theta = \operatorname{sen} i \cos \theta, \quad (11)$$

donde  $\theta$  es la fase orbital angular ( $\theta = 2\pi\phi$ ).

Elevando luego al cuadrado la ec. (10) y usando (11) se obtiene la así llamada condición dinámica:

$$\delta^2 = \cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta,$$

que dividiendo ambos miembros por  $r_g^2$  se transforma en

$$\left(\frac{\delta}{r_g}\right)^2 = \frac{\cos^2 i}{r_g^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 i}{r_g^2} \operatorname{sen}^2 \theta \quad (12)$$

Nótese aquí que para un sistema binario dado la inclinación  $i$  y el radio de la componente primaria  $r_g$  son fijos, por tanto, los coeficientes

$$A = \frac{\cos^2 i}{r_g^2}$$

y

$$B = \frac{\operatorname{sen}^2 i}{r_g^2}$$

son constantes para el sistema, y la ec. (13) se puede escribir como una relación lineal entre las variables  $(\delta/r_g)^2$  y  $\text{sen}^2 \theta$ :

$$\left(\frac{\delta}{r_g}\right)^2 = A + B \text{sen}^2 \theta \quad (13)$$

Por tanto, a partir de un ajuste lineal a los pares de valores  $[\text{sen}^2 \theta_i; (\delta/r_g)_i^2]$  para los puntos del eclipse es posible obtener los coeficientes  $A$  y  $B$ , y de ellos deducir

$$r_g = \sqrt{\frac{1}{A + B}}$$

e

$$i = \arctan \sqrt{\frac{B}{A}}$$