

Una forma de visualizar la teoría especial de la relatividad. Los diagramas espaciotemporales

I. INTRODUCCIÓN

Vamos a intentar exponer algunas ideas para dar argumentos que muestren que la teoría especial de la relatividad puede ser pensada (quizás ésta sea la forma más elegante de hacerlo y quizás la que resulte más útil para introducirse en la posteriormente desarrollada teoría general de la relatividad) como una teoría geométrica del espaciotiempo.

Allá por el año 1907 el matemático alemán Hermann Minkowski presentó una interpretación geométrica de la teoría formulada dos años antes por uno de sus estudiantes, Albert Einstein.

En la, ahora ya famosa, exposición de sus ideas, Minkowski demolió la idea de espacio y tiempo como entidades independientes y definió lo que ahora conocemos como espaciotiempo diciendo algo así como:

“Las ideas sobre el espacio y el tiempo que deseo mostrarles han brotado del humor de la física experimental y allí está su fuerza. Son subversivas. Desde ahora en adelante, el espacio en sí y el tiempo en sí están condenados a desvanecerse en meras sombras y sólo cierta unión entre ambos preservará una realidad independiente.”

Algo más de una década antes, el famoso escritor inglés Herbert George Wells, conocido por sus obras de ciencia ficción, introduce, en su libro “La Máquina del Tiempo” (1895), la idea del tiempo como una coordenada haciendo que uno de los uno de los viajeros (Filby) comente:

“Claramente, todo cuerpo real debe tener una extensión en cuatro direcciones: debe tener Longitud, Amplitud, Grosor y Duración. Pero a través de una debilidad natural de la carne, que les explicaré en un momento, tendemos a pasar por alto este hecho. En realidad existen 4 dimensiones, 3 de las cuales solemos llamar planos Espaciales y una cuarta, el Tiempo. Existe, sin embargo, una tendencia a realizar una distinción irreal entre las 3 primeras dimensiones y la cuarta, quizás porque nuestra conciencia se mueve de manera intermitente a lo largo del Tiempo desde el inicio hasta el final de nuestras vidas.”

Volvamos a la teoría especial de la relatividad. Primero que todo recordemos los dos postulados básicos en los que Einstein basó la construcción de su teoría para sistemas de referencia inerciales, es decir aquellos en los cuales una partícula libre es vista o en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

Postulados:

1. Las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial.
2. La rapidez (finita) de la luz en el vacío tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. Discuta porqué no hablamos de velocidad de la luz sino de su rapidez.

Como la rapidez de la luz en el vacío es una constante fundamental de la naturaleza, la denotaremos con un símbolo. Históricamente se utiliza la letra c para este fin. Esta rapidez es la máxima de propagación, tanto para partículas materiales como para señales de cualquier tipo que transporten información.

Como notó Minkowski es el segundo de estos postulados el que, además de obligarnos a redefinir por completo el concepto de *simultaneidad*, tiene un significado geométrico asombroso.

II. ALGO DE GEOMETRÍA EUCLÍDEA Y FÍSICA NEWTONIANA

Primero hagamos un pequeño repaso de geometría euclídea con la que estamos más familiarizados.

La teoría de la dinámica desarrollada por Sir Isaac Newton hace uso como escenario de un espacio tridimensional (*una variedad diferenciable tridimensional si se quiere*) y de un tiempo (*una variedad unidimensional*) absoluto que es independiente de los observadores.

Una geometría es caracterizada por una serie de objetos de enorme importancia, sus *invariantes*, es decir, objetos que no se modifican cuando uno realiza alguna transformación particular en el espacio.

Es totalmente válido preguntarse en este momento ¿Cuáles son los invariantes de la geometría euclídea?

Pensemos en un par de puntos a los que denotaremos como $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. El invariante más importante (junto, quizás, con los ángulos) para esta geometría es lo que conocemos como la *distancia* entre estos puntos o longitud del segmento, es decir:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Sabemos que esta cantidad no se modifica si realizamos alguna de las siguientes tres transformaciones, conocidas también como movimientos rígidos (las isometrías del espacio euclídeo) y con las que el lector está, seguramente, familiarizado:

1. Traslación.
2. Rotación.
3. Reflexión especular.

Así, la física newtoniana tiene como cantidades invariantes que no dependen del sistema inercial: la distancia entre dos puntos espaciales (por ser la euclídea la geometría del mismo) y el intervalo temporal entre dos sucesos ya que el tiempo, en esta teoría, es considerado como universal.

Es interesante notar que las conocidas transformaciones Galileanas que no son otra cosa que una materialización de su principio de relatividad, dejan inalterados los dos invariantes

fundamentales de la geometría euclídea. Además, son las únicas transformaciones lineales que hacen esto, dejando entrever la relación que existe entre ambos.

Sólo para recordar, si tenemos dos sistemas inerciales \mathcal{O} y \mathcal{O}' estando el segundo en movimiento relativo del primero con una velocidad v en la dirección de la coordenada espacial z (sin perder generalidad por esta elección) tenemos que la forma en que se conectan las coordenadas en cada uno de los sistemas viene dada por:

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = z - vt \quad t' = t$$

III. LOS PROBLEMAS CON EL ELECTROMAGNETISMO

Como vieron anteriormente en éste y otros cursos iniciales a lo largo de la carrera, hacia finales del siglo XIX se había llegado a una situación histórica en la que dos teorías ampliamente aceptadas y capaces de realizar predicciones asombrosas en su ámbito eran incompatibles entre sí. Recordemos que el electromagnetismo desarrollado por James Clerk Maxwell, Michael Faraday y compañía no es invariante frente a transformaciones de coordenadas Galileanas (como el lector podrá demostrar sin grandes dificultades), es decir, podemos concluir que la propagación de luz no obedece el principio de relatividad de Galilei. Esto llevó, primero a que se proponga la idea del éter, descartada gracias a los experimentos interferométricos realizados por Albert Abraham Michelson y Edward Williams Morley. Posteriormente Einstein desarrolló la teoría especial de la relatividad y modificó, como dijimos, radicalmente nuestra interpretación del espacio y del tiempo.

En el marco de esta teoría diremos que un par de eventos que ocurren en puntos alejados entre sí serán simultáneos sólo cuando ocurran en el momento en que reciben el destello luminoso que fue emitido por una fuente ubicada de forma equidistante de ambos. Como ya sabemos, esta *simultaneidad* dependerá del sistema de referencia inercial que estemos considerando.

Estas modificaciones también cambian, como era de esperar, el principio de relatividad de Galilei, que sólo será aplicable (en el sentido que nos proporcionará resultados numéricos aceptables) cuando uno esté estudiando fenómenos donde las velocidades características sean mucho menores que la de la luz en el vacío. Ahora las fórmulas de transformación que relacionan las coordenadas medidas desde dos sistemas inerciales en movimiento relativo (los mismos que consideramos en el caso newtoniano) vienen dadas por:

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad t' = \frac{t - (vz)/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

y se conocen como transformaciones de Lorentz en reconocimiento a los trabajos realizados en esta área por el físico y matemático holandés Hendrik Antoon Lorentz.

Debido a que aparece con mucha frecuencia y su importancia, por motivos que más adelante (esperamos) queden claros, a la cantidad $1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ se la designa, comunmente, con la letra γ .

Al igual que como hicimos con las transformaciones Galileanas, en este punto es importante recordar que la única familia de transformaciones *lineales* que dejan invariante al intervalo

entre dos eventos (cantidad que definiremos apropiadamente más adelante) son las transformaciones de Lorentz. Manifestándose de esta manera, nuevamente, el fuerte vínculo entre leyes de transformación (o principio de relatividad) e invariantes geométricos dentro de una dada teoría.

IV. MODIFICANDO LA NOCIÓN DE DISTANCIA

Para hacer mediciones de distancias correctamente sabemos que debemos realizar las mismas de forma simultánea (discuta con sus compañeros el motivo de esto), así que como la teoría especial de la relatividad modificó esta noción ciertamente modificó, también, la forma en que debemos realizar medidas de distancias espaciales y de intervalos temporales. Teniendo en cuenta estas “sutilezas” es que se pueden obtener dos predicciones ampliamente discutidas en la teoría por lo que no entraremos en detalles sobre las mismas:

1. La contracción de las longitudes o contracción de FitzGerald llamada así en reconocimiento a los trabajos del físico irlandés George Francis FitzGerald que junto con Lorentz hicieron aportes en este tema.
2. La dilatación temporal.

V. GEOMETRÍA DEL ESPACIOTIEMPO

Nota inicial: Entenderemos por *observador* al conjunto de ejes coordenados, regla para realizar medidas de longitudes espaciales y reloj para realizar medidas de intervalos de tiempo. Ver Figura 1.

Minkowski interpretó a la combinación de coordenadas espaciales y el tiempo como un espacio 4-dimensional al que hoy conocemos como espacio-tiempo. Así en el espacio-tiempo cada punto, denominado *evento*, es una representación de algo que, para un dado observador, sucede en un lugar determinado y en un instante de tiempo preciso. Aunque esta idea de un espacio de 4 dimensiones puede generar sensaciones de estar frente a algo muy complicado las primeras veces (muy probablemente por la imposibilidad real que tenemos de representarlo completamente en forma gráfica) cuando uno lo piensa y lo discute se termina convenciendo de que es natural ya que todas las cosas ocurren en un lugar y en un instante, por lo que imaginar que nuestro universo es un continuo 4-dimensional donde 3 de ellas representan al espacio y la restante el tiempo comienza a volverse algo más que razonable.

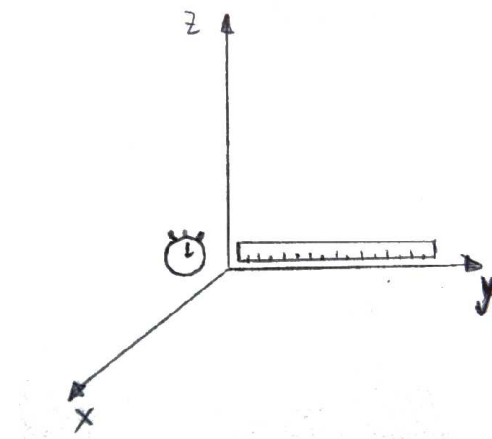


Figura 1: Nuestra noción de *observador*.

Nota sobre las 4 dimensiones: Como dijimos hace algunas líneas trabajar en un espacio 4-dimensional genera, al principio, algunos resquemores. Debe el

lector recordar que, quizás sin notarlo, ya ha trabajado con espacios de mayor número de dimensiones que tres. Piense simplemente en el *espacio de las fases* (donde se representan todas las posibles configuraciones dinámicas de un dado sistema) de una única partícula, cada punto de ese espacio es caracterizado por 6 cantidades (las tres componentes cartesianas de la posición y la velocidad, por ejemplo) y, seguramente, el lector ya haya lidiado con sistemas de más de una partícula. Así, sin pretender quitar relevancia al cambio de paradigma que genera pasar de espacio y tiempo a espaciotiempo, queremos remarcar que trabajar con espacios de muchas dimensiones ya es parte de su vida académica cotidiana.

Tratemos de analizar detalladamente las implicaciones geométricas del segundo postulado de la teoría de la relatividad especial desarrollada por Einstein. Para ello pensaremos en un frente de onda luminosa vista desde un sistema de referencia inercial al que denotaremos con \mathcal{O} . El observador verá allí a la luz propagándose en forma que el mismo está caracterizado por puntos pertenecientes a una cáscara esférica cuyos puntos están relacionados de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2,$$

ahora otro observador montado a un sistema inercial diferente al que denotaremos como \mathcal{O}' deberá llegar a la misma conclusión (ya que las leyes de la física deben ser las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales y dado que la rapidez de la luz en el vacío, c , es una constante fundamental de la naturaleza por lo que no puede depender del observador inercial). Por tal motivo visto desde \mathcal{O}' los puntos del frente de onda deberán estar relacionados de modo que:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2.$$

De esta forma hemos construido nuestro invariante fundamental para el espaciotiempo de Minkowski, el *intervalo* entre dos eventos, que se denota como s^2 y está definido (con la convención de signatura $(+, -, -, -)$, tener en cuenta que se puede tomar la $(-, +, +, +)$ generando cambios relativamente evidentes en las próximas definiciones) como:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - r^2. \quad (1)$$

Entonces el intervalo entre eventos ocupa el lugar *de privilegio* que ocupaban la distancia entre puntos y el intervalo temporal en la física newtoniana (o en la geometría euclídea como quiera verse). Así, la existencia de este invariante nos está indicando que el espaciotiempo posee una estructura geométrica diferente a la euclídea por lo que resulta importante que la misma sea estudiada en detalle.

De la misma definición de intervalo podemos ver una primera gran diferencia, ahora un intervalo puede ser de tres tipo, *temporal*, *nulo* o *espacial* según sea el mismo menor, igual o mayor a 0. Los que suelen ser tenidos en cuenta y estudiados con mayor nivel de detalle son los dos primeros ya que son los que siguen partículas materiales y la luz respectivamente.

VI. DIAGRAMAS ESPACIOTEMPORALES

Anteriormente dijimos que resulta imposible realizar una representación gráfica completa del espaciotiempo, por lo que en esta sección vamos a omitir dos de las tres coordenadas espaciales (la y y la z para fijar ideas), así estudiaremos diagramas a los que llamaremos $x - t$, x jugando el rol “tradicional” de las abscisas y t el de las ordenadas. Podríamos omitir una sola, pero, dado que realizar dibujos tridimensionales es mucho más complejo que los bidimensionales y que esta complicación no redundará en aportes significativos es que realizaremos esta simplificación adicional.

Para desmitificar, un *diagrama espaciotemporal* no es otra cosa que un diagrama que muestra la historia de un objeto que se mueve en el espaciotiempo. Estas trayectorias reciben por este motivo el nombre de *línea de mundo* de una dada partícula. Una particularidad de estos diagramas son las unidades que se suelen utilizar para construirlos, veamos el motivo. La rapidez de la luz en el vacío es aproximadamente de 300.000 kilómetros por segundo por lo que la elección de unidades en el sistema MKS (por mencionar alguno utilizado con frecuencia) y la misma escala para el metro y el segundo hace que describir la trayectoria de un fotón en un diagrama espaciotemporal sea extremadamente difícil de visualizar. Por tal motivo, lo que se suele usar es el siguiente razonamiento:

Si utilizo años para medir el tiempo usaré años luz para medir las distancias, si utilizo segundos para medir el tiempo, usaré segundos luz para medir distancias, etc. de esta forma la trayectoria espaciotemporal de un fotón sigue una línea recta cuya pendiente será 1 (es decir 45 grados).

Es importante notar que realizar esto es totalmente equivalente a utilizar el sistema de unidades conocido como *geométrico* en el que $c = 1$, así, sin unidades de modo que tanto el tiempo como las distancias se miden en las mismas unidades. Al hacer esto c , de enorme importancia para esta teoría, dejará de aparecer explícitamente en las expresiones con las que trabajemos por lo que deberemos ser cuidadosos (y memoriosos) a la hora de trabajar.

Ahora cabe preguntarse ¿Cómo se construye uno de estos diagramas?

Empecemos a responder esta pregunta pensando que queremos realizar el diagrama espaciotemporal de una partícula relativista libre que, visto en nuestro sistema

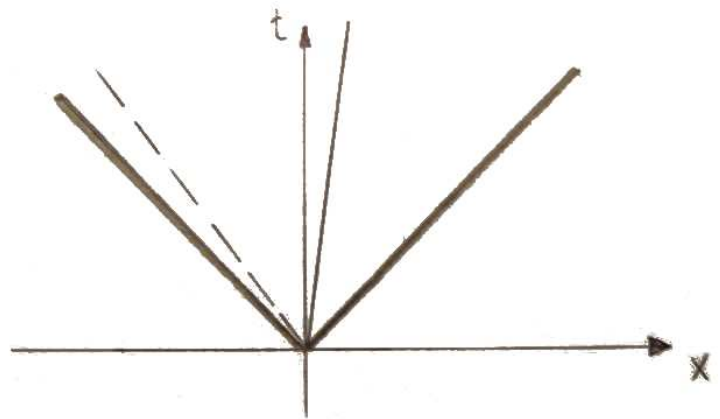


Figura 2: Diagrama espaciotemporal donde se muestra con línea continua de trazo grueso las trayectorias de dos fotones que se mueven en direcciones opuestas y el de dos partículas masivas.

de referencia inercial, se mueve en la dirección del eje x con una velocidad $v = 1/2$ y teniendo en cuenta que hemos elegido el origen de modo que el primer evento que medimos ocurra en $(x = 0, t = 0)$ (notar que ya estamos utilizando el sistema de unidades geométricas. Claramente deberá seguir una trayectoria recta porque su velocidad no cambia. Esta recta tendrá una pendiente inversamente proporcional a la rapidez, así objetos que se mueven más lentamente seguirán trayectorias más y más verticales, además hay que recordar que *ninguna* partícula puede seguir en este tipo de diagrama una trayectoria con pendiente menor a 1 ya que esa es la que sigue una señal luminosa, que como sabemos, se propaga a la rapidez de la luz en el vacío y ésta es la máxima posible.

En la figura 2 vemos, en trazo continuo fino una partícula moviéndose en la dirección positiva del eje x y con línea de trazos otra moviéndose con mayor velocidad en la dirección negativa del eje x . La línea continua de trazo grueso representa las trayectorias de dos fotones propagándose en direcciones opuestas del eje.

Volvamos al problema de cómo construir uno de estos diagramas. Para ello consideremos que decidimos empezar a realizar las mediciones en un dado instante de tiempo y que tomamos el origen de coordenadas de modo que esa primera medición coincida con él. Evitaremos utilizar cámaras de fotos en esta construcción ya que como en el proceso de obtención de fotografías están involucrados fenómenos relacionados con la luz, se podrían (deberían) generar preguntas “incomodas”. Por tal motivo (aunque ciertamente no es necesario) haremos una construcción “lo más mecánica que se pueda” de estos diagramas.

Restrinjamos nuestro interés a objetos que *sabemos* que van a seguir trayectorias rectilíneas y uniformes. Pensemos, entonces, que construimos una secuencia de dispositivos (con relojes sincronizados y ubicados en forma equidistante entre sí) que son capaces de detectar el paso del objeto que estamos interesados en “observar” y de registrar el instante de tiempo en el que dicho objeto pasó *por ellos*. Lo que hacemos, después de que nuestra partícula recorrió completamente por nuestra secuencia de *marcadores* es hacer anotaciones del “instante” por el que nuestra partícula pasó por cada uno de los instrumentos de nuestro dispositivo, así obtendremos la posición de la partícula en un dado instante. Una posible secuencia de instantáneas para una partícula que se mueve con una velocidad $v_{\bullet} = 1/4$ estaría representada en la figura 3 con círculos negros y una que lo hace con $v_{\times} = 1/2$ con cruces.

Con este trabajo en la mano resulta simple volcar toda esa información en un diagrama como el presentado en la figura 2 para obtener los diagramas espaciotemporales de esas dos partículas.

Otra forma de hacer uno de estos diagramas es notar lo siguiente. Revisemos la definición de *rapidez*, como sabemos $v \equiv v_x = dx/dt$. Así en cada punto de un diagrama espaciotemporal el recíproco de la velocidad ($1/v$) nos dará la pendiente de su línea de mundo. Claramente, las líneas de mundo de partículas que se mueven con velocidad constante serán rectas. Además ahora queda claro que, cuanto más vertical sea la línea de mundo en un evento particular, menor la velocidad de la partícula que se esté analizando y que la restricción de que *nada* puede trasladarse a mayor velocidad que la luz en el vacío se traduce en que *nunca* la pendiente de una línea de mundo puede ser menor a 1.

Una definición importante es la de *tajada temporal* o *hipersuperficie de simultaneidad*. Una tajada temporal es el conjunto de eventos que, para un determinado observador, ocurren en

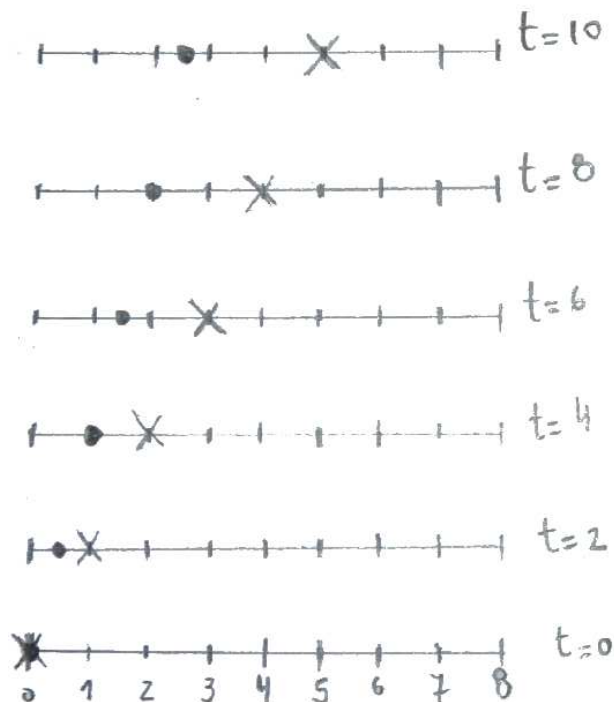


Figura 3: Secuencia de instantáneas para dos partículas que se mueven en la dirección positiva del eje x , una con velocidad $v_o = 1/4$ y otra con $v_x = 1/2$.

un dado valor de su coordenada temporal o sea que son simultáneas para él. Claramente de nuestro modo de definir a las tajadas temporales se desprende que cada observador verá tajadas temporales diferentes. En nuestro universo $1 + 1$ (una coordenada espacial y una temporal) podemos intentar ver como son para un observador en reposo las tajadas temporales de otro que, según él, se mueve con velocidad v en la dirección del eje x . Para ello lo que debemos realizar es un gráfico de la transformación de Lorentz para la coordenada temporal haciendo variar los valores de t' . La correspondiente a $t' = 0$ será el eje espacial x' del observador en movimiento. Puede verse que las tajadas temporales son rectas cuya pendiente es igual a v . Haciendo esto mismo con la fórmula para x' nos lleva a formar “superficies” de eventos que ocurren en la misma coordenada espacial, tomando aquella para la cual $x' = 0$ obtenemos el eje temporal t' . Así vemos que el eje temporal se corresponde con la línea de mundo del propio observador. Medido *desde* el eje t la pendiente de estas superficies es v por lo que vemos que coincide con la del eje x' . Todo esto puede verse para un caso genérico en la figura 4.

Una cosa interesante de notar es los eventos para los cuales el valor del intervalo s^2 dado por la simplificación de la expresión (1) para el caso de una única dimensión espacial es constante se representa en un diagrama espaciotemporal por una hipérbola que se denomina *hipérbola invariante*. Notar que la hipérbola invariante en el espaciotiempo de Minkowski juega el rol de las circunferencias en el espacio euclídeo.

Actividad para el lector: realice gráficos de las hipérbolas invariantes correspondientes a

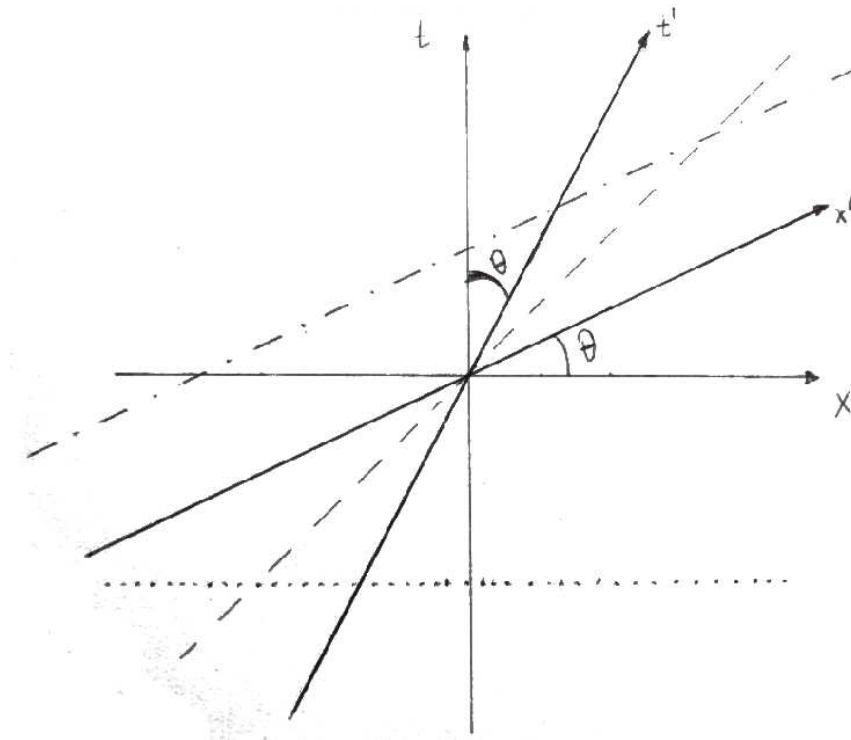


Figura 4: Diagrama de Minkowski (o espaciotemporal) con dos observadores (o sistemas de coordenadas) presentados en simultáneo. El eje temporal de cada uno de los observadores representa su línea de mundo.

diferentes valores del intervalo s^2 recordando que el mismo puede tomar cualquier valor en \mathbb{R} . Discuta la evidente diferencia de *longitud en el diagrama espaciotemporal* de segmentos que unen un punto de una dada *hipérbola invariante* con, por decir algo, el origen que haya elegido para las coordenadas x y t . Más adelante trabajaremos esta idea con más detalle.

A. Un par de ejemplos

1. Ejemplo 1: El cono de luz en $2 + 1$ dimensiones

Primero plantearemos por única vez un diagrama espaciotemporal donde omitiremos solamente 1 coordenada espacial, un diagrama $2 + 1$ si se quiere. Esto será útil para construir lo que se conoce como *cono de luz*, una estructura de enorme relevancia para la teoría. Además daremos una serie de definiciones de enorme utilidad y que aparecen con mucha frecuencia por lo que familiarizarse con las mismas resulta de gran utilidad.

En la figura 5 presentamos un cono de luz en $2 + 1$ dimensiones y representamos las curvas y regiones de gran importancia que definiremos más adelante.

Tratemos de responder (imaginamos que en este momento el lector ya conoce la respuesta) la pregunta ¿qué es el cono de luz?

Para ello imaginemos la proyección sobre un plano de las sucesivas cáscaras esféricas que

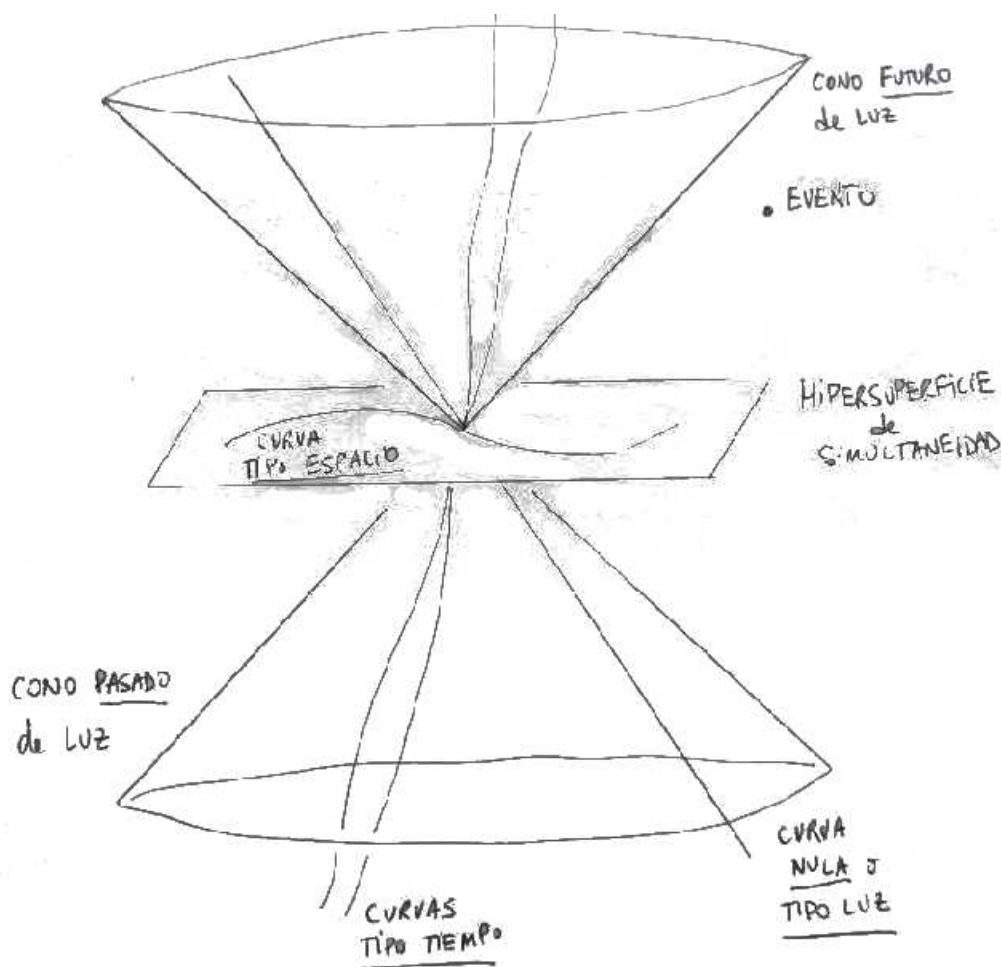


Figura 5: Cono de luz en $2 + 1$ dimensiones.

atraviesa el frente de onda producido por un destello luminoso. Claramente éstas son circunferencias concéntricas. Dejamos a cargo del lector la siguiente actividad: construya las instantáneas para esta sucesión de sucesos y logre convencerse que en un diagrama espacio-temporal $2 + 1$ las mismas se ubican en un cono cuya generatriz es una recta que forma un ángulo de 45 grados con el plano espacial. Haciendo una inversión temporal obtenemos con un gráfico similar al que se presenta en la figura 5. Como no hay partículas materiales que puedan moverse a velocidad mayor que la de la luz en el vacío podemos notar dos cosas:

1. Pensemos en un evento genérico E y su correspondiente cono de luz, ahora notemos que *cualquier* evento que esté dentro del cono de luz superior o *cono futuro de luz* podrá ser afectado de *forma causal* por E y que *todos* los que están contenidos en el cono de luz inferior o *cono pasado de luz* afectan causalmente a E . Por este motivo es que a esas regiones se las suele denominar como *futuro (pasado) causal de E* . El resto de los eventos, los que no están conectados causalmente con E se conoce como *el resto*.

2. Las partículas materiales que pasan por el evento E siguen líneas de mundo que están siempre contenidas dentro del cono de luz y cuya pendiente nunca es menor a 1 , este tipo

de trayectorias se conoce como *curva tipo tiempo*. Los fotones siguen líneas de mundo rectas contenidas en la pared del cono de luz siguiendo trayectorias conocidas como *curvas nulas o tipo luz*. Otro tipo de trayectorias en la que uno puede pensar son aquellas que están fuera del cono de luz, representan líneas de mundo de hipotéticas partículas que deben viajar más rápido que la luz. Queremos remarcar que fuera del cono de luz del evento E existen otras cosas que no tienen porqué ser hipotéticas partículas que se mueven más rápido que la luz como veremos, más adelante, en el Ejemplo 3.

Será complicado en estas pocas líneas expresar la tremenda importancia que tiene la estructura de conos de luz, pero el lector debe recordar que es ésta la que permite decir “qué eventos podrían estar conectados entre sí y cuales no” dando la *estructura causal* del espaciotiempo. Estas ideas cobrarán mayor relevancia (y complejidad) en el marco de la teoría general de la relatividad que no abordaremos en este texto.

2. Ejemplo 2: Movimiento relativo con $v = 9/10$

Dejemos nuestro complejo universo $2 + 1$ y volvamos a nuestro universo $1 + 1$ y veamos un ejemplo que nos permita visualizar (un poco más) los conceptos que estuvimos desarrollando hasta ahora.

Pensemos en dos observadores, uno que denotaremos con \mathcal{O} y al que consideraremos en reposo y otro representado como \mathcal{O}' que se estará moviendo, respecto a \mathcal{O} , con velocidad $v = 9/10$ en la dirección positiva del eje x .

En la figura 7 presentamos la línea de mundo del observador \mathcal{O}' con una línea continua de trazo grueso en el sistema \mathcal{O} . Además, con línea de trazos, se presentan tajadas temporales para $t' = 0$, $t' = 1$ y $t' = 2$. También presentamos con línea continua de trazo fino las intersecciones con tajadas temporales $t = cte$ correspondientes a los intervalos $\Delta t'$ medidos sobre la línea de mundo de \mathcal{O}' . De esta figura podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. El observador \mathcal{O} ve que los relojes en movimiento hacen tic más lentamente que los suyos. Por ejemplo el tic $t' = 2$ ocurre “recién” cuando su reloj marca $t \equiv 2\gamma = 2/\sqrt{1 - 0.9^2} = 4.59$.
2. El observador \mathcal{O}' obtendrá *exactamente* la misma conclusión.

Esta conclusión derrumba la aparente paradoja detrás de la afirmación *los relojes en movimiento hacen tic más lentamente que los que están en reposo*.

3. Ejemplo 3: La Charla de Café

Aquí pretendemos presentar un ejemplo que *desmitifique* a la región “fuera del cono de luz” como aquella donde ocurren “cosas extrañas”.

Pensemos en una típica charla que podría ocurrir en un café de la ciudad. Enfrentados en una mesa se encuentran Mónica \mathcal{O}_M y Alberto \mathcal{O}_A , por este motivo podemos imaginar a sus respectivas líneas mundo como rectas paralelas como puede verse en la figura 6 representadas con una línea continua gruesa. Para este ejemplo las tajadas temporales son rectas horizontales, así los eventos M_0 y A_0 para \mathcal{O}_M y \mathcal{O}_A ocurren en forma simultánea, al igual que M_1 y A_1 o M_2 y A_2 . El instante t_0 Mónica pregunta “¿Tomás un café?”, esa información (línea a trazos con flechas en la figura 6) viaja dentro del cono de luz centrado en M_0 con la rapidez

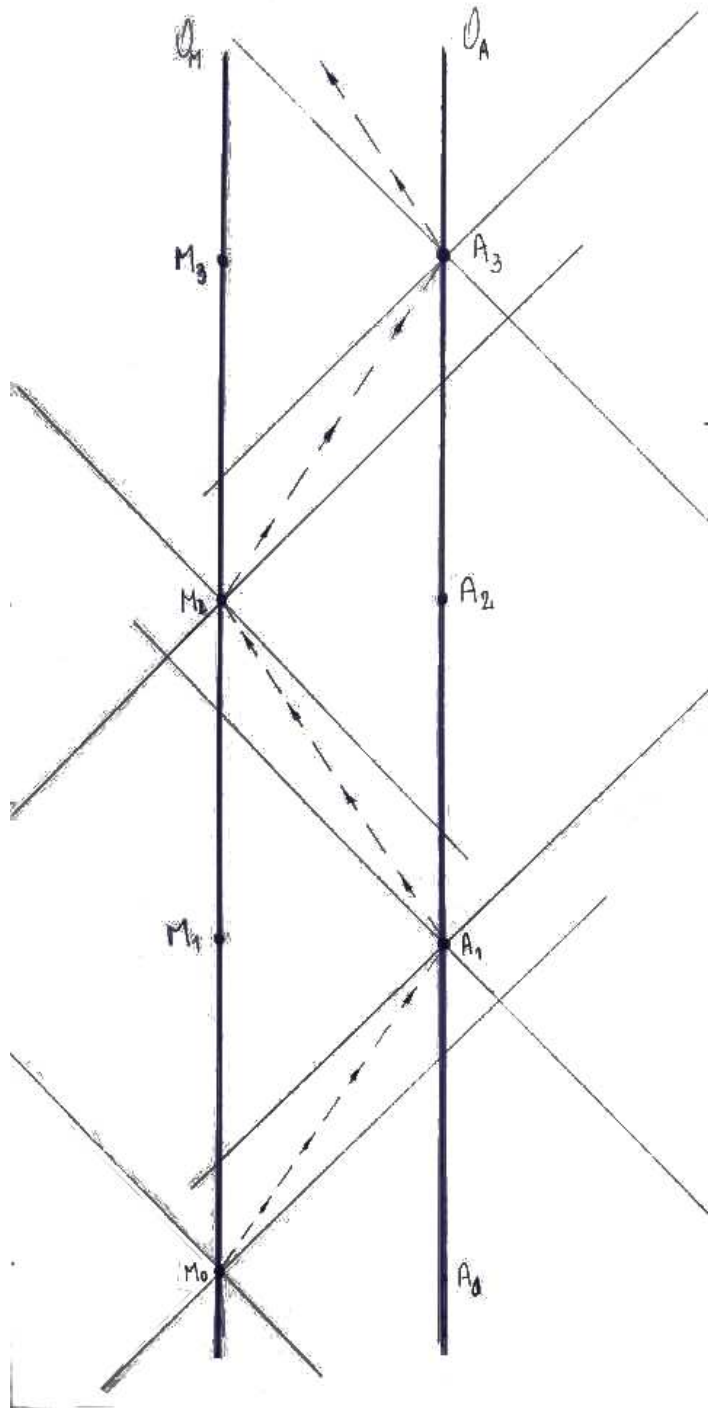


Figura 6: Charla de café.

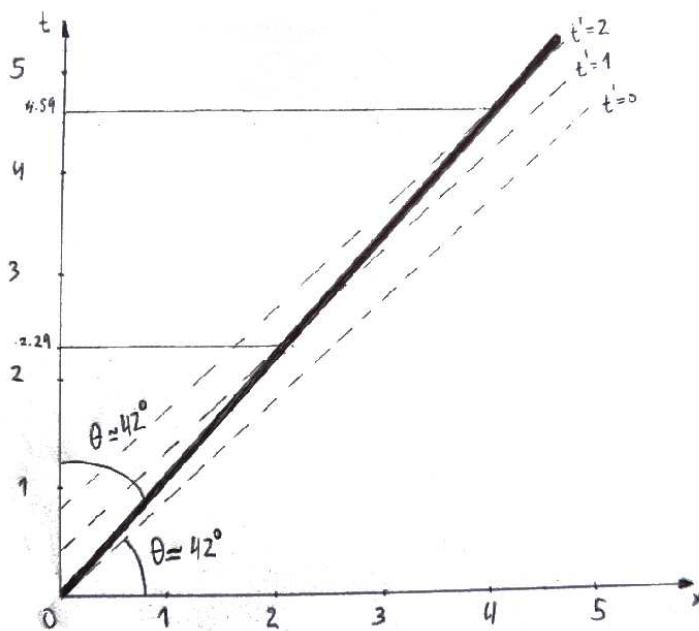


Figura 7: Diagrama espaciotemporal para dos observadores \mathcal{O} y \mathcal{O}' en movimiento relativo con una velocidad $v = 9/10$ en la dirección de eje positivo de la coordenada x . Se muestra la línea de mundo correspondiente a \mathcal{O}' visto desde el observador \mathcal{O} . Mostramos tajadas temporales de ambos y las correspondientes intersecciones con los ejes temporales de cada uno de los dos sistemas.

del sonido (la pendiente no está a escala por cuestiones estéticas) y es recibida por Alberto en A_1 que responde (sin pensar ya que está muy ansioso) “Sí, ¿pedimos unas medialunas?”, esa respuesta es recibida por Mónica en M_2 que vuelve a responder afirmativamente, siendo esta respuesta recibida por Alberto en el evento A_3 , y la conversación continúa. Vemos en este ejemplo simple como cada vez que formulamos una pregunta con cada una de las personas con las que alguna vez hablamos (que podrá ser gente más o menos extraña, pero seguro no está moviéndose con rapidez mayor a la de la luz en el vacío) en ese instante fuera del cono de luz.

B. Los teoremas *casi nada* Pitagóricos

Como dijimos previamente, en el marco de la teoría especial de la relatividad, tiempo y espacio perdieron su identidad y ahora están mezclados. Podemos poner esta mezcla en forma de fórmula por medio de estas dos afirmaciones a las que podemos denominar *teoremas casi nada Pitagóricos* (que son teoremas en una geometría hiperbólica en los que se intercambian funciones trigonométricas circulares $\cos x$ y $\sin x$ que satisfacen la identidad $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ por funciones trigonométricas hiperbólicas $\cosh x$ y $\sinh x$ para las cuales se satisface la identidad $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$).

1. El intervalo temporal que se mide siguiendo la línea de mundo del observador puede calcularse utilizando la expresión:

$$(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2.$$

2. Las longitudes medidas en una tajada temporal correspondiente un dado observador se calculan a través de la fórmula:

$$(\Delta x')^2 = (\Delta x)^2 - (\Delta t)^2.$$

De estas dos expresiones y haciendo uso explícito de la definición de γ no es complicado obtener que las mismas son equivalentes a: $\Delta t = \gamma \Delta t'$ y $L = L'/\gamma$ respectivamente.

Una aclaración importante y que nos debe quedar clara es la siguiente:

¡Importante!: Cuando una medición de longitud se debe hacer en una dirección que, en un diagrama espaciotemporal, forma un cierto ángulo, nunca la debemos realizar con una regla (común al menos, consulte a su cátedra amiga para obtener una regla *especial*) ya que hacerlo de esta forma supone que la geometría con la que estamos trabajando es la Euclídea donde son válidos los teoremas Pitagóricos clásicos. La geometría correcta para describir al espaciotiempo es Lorentziana donde tiempo y espacio deben combinarse por medio de una diferencia de cuadrados para obtener la distancia (el intervalo) apropiada entre dos eventos dados. Así, si bien en el diagrama realizado en el papel las longitudes de segmentos que unen el origen de coordenadas con diferentes puntos de una dada hipérbola invariante son diferentes, su intervalo (el invariante geométrico relevante) es siempre el mismo.

C. Relatividad de la simultaneidad

Veamos cómo se refleja en estos diagramas la *relatividad de la simultaneidad* entre eventos. Ello está presentado en la figura 8 que ahora pasamos a explicar detalladamente.

Consideremos los eventos A y B , que para el observador \mathcal{O} , ocurren de modo simultáneo y en coordenadas espaciales relacionadas por una reflexión total de la coordenada x para fijar ideas. El observador \mathcal{O} podrá confirmar que A y B son (para él) simultáneos enviando señales luminosas hacia estos eventos y recibiendo la luz reflejada. Esto se presenta con trazos punteados en la figura 8. Imaginemos ahora a otro observador \mathcal{O}' en movimiento relativo a \mathcal{O} que se encuentra con éste en el mismo instante que según \mathcal{O} A y B ocurren (evento O). El observador \mathcal{O}' también envía señales luminosas CBD y EAF para “iluminar” a estos eventos y (como se muestra con líneas continuas en la figura 8 recibir la información por ellos reflejada). Por la simetría CB y AF son iguales por lo que \mathcal{O}' concuerda con \mathcal{O} en que estos eventos son equidistantes, pero como se puede ver de la figura 8 la señal CB fue enviada antes que la AF por lo que para \mathcal{O}' el evento B ocurre antes que A . Así, eventos que para el observador \mathcal{O} son simultáneos para \mathcal{O}' no lo son. Vemos que para \mathcal{O} los eventos A , B , O ocurren en forma simultánea mientras que para \mathcal{O}' ocurren en secuencia B , O , A .

Actividad propuesta: ¿Cuál sería el ordenamiento temporal que dará a los eventos A , O , B , un observador \mathcal{O}'' cuya velocidad relativa al observador \mathcal{O} fuese igual pero con dirección opuesta a la de \mathcal{O}' en la figura 8?

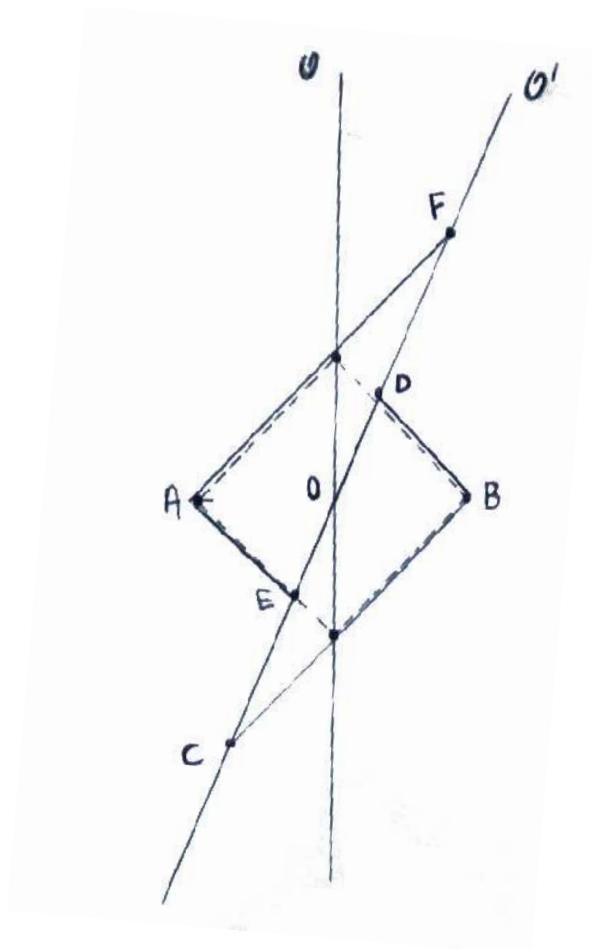


Figura 8: La relatividad de la simultaneidad de eventos en un diagrama espaciotemporal.

D. El factor k

Imaginemos nuevamente a nuestros dos observadores inerciales \mathcal{O} y \mathcal{O}' en movimiento relativo con velocidad v como se muestra en la figura 9.

En la figura 9 se muestran las líneas mundo de los dos observadores inerciales y señales luminosas enviadas por \mathcal{O} con un intervalo temporal T para su reloj. Si, como ya hicimos, suponemos que existe una relación *lineal* entre las mediciones realizadas entre observadores inerciales podemos suponer que para \mathcal{O}' estas señales luminosas están separadas por un intervalo temporal dado por kT . El principio de relatividad asegura que se debe arribar a la misma conclusión si las señales luminosas son enviadas por el observador \mathcal{O}' .

De la figura 9 podemos ver que la constante k debe ser alguna función de la velocidad relativa v entre ambos observadores

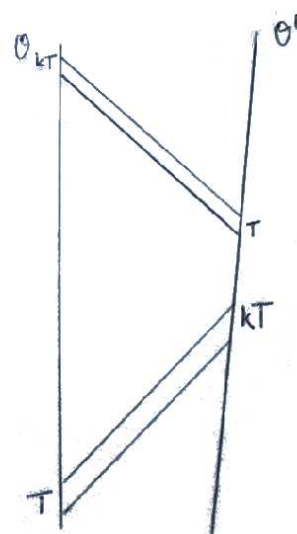


Figura 9: El factor k : aspectos básicos.

inerciales.

En lo que sigue tratemos de deducir la relación entre v y k . Para ello recordemos primero una forma que tiene cualquier observador inercial para asignar coordenadas a eventos. Para ello pensemos que en el instante t_0 el observador envía una señal luminosa que es reflejada en el evento $E(t, x)$, dicha información es recibida por el observador en el instante t_1 , ver figura 10.

Así, recordando que estamos utilizando unidades geométricas, podemos concluir que el evento E tiene coordenadas dadas por:

$$(t_E, x_E) = \left(\frac{t_0 + t_1}{2}, \frac{t_1 - t_0}{2} \right).$$

Para comenzar/completar nuestra deducción veamos la configuración de observadores inerciales de la figura 11. Luego de un intervalo de tiempo T para \mathcal{O} , éste envía un pulso luminoso que es recibido por \mathcal{O}' en A luego de un intervalo de tiempo kT . Al recibirlo, \mathcal{O}' envía un pulso luminoso que será recibido por \mathcal{O} pasado un intervalo de tiempo k^2T respecto al pulso original. Para \mathcal{O} las coordenadas del evento A vendrán dadas (tomando $t_0 = T$ y $t_1 = k^2T$) por:

$$(t_A, x_A) = \left(\frac{T(k^2 + 1)}{2}, \frac{T(k^2 - 1)}{2} \right).$$

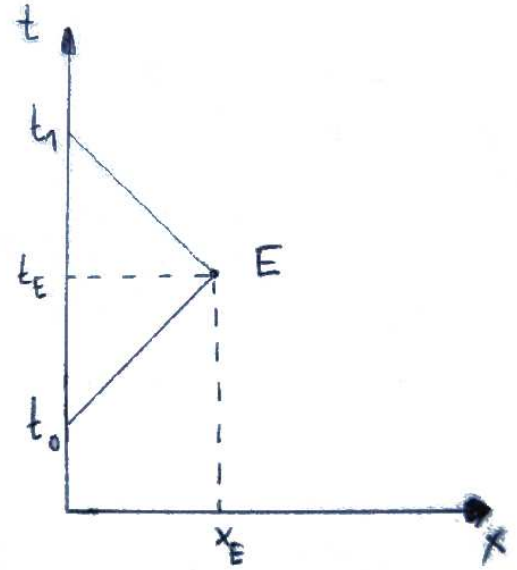


Figura 10: Asignando coordenadas a eventos.

Note el lector que permitiendo a T tomar diferentes valores obtendremos la línea de mundo del observador \mathcal{O}' visto desde \mathcal{O} .

Estamos a un paso de obtener la relación entre k y v ya que:

$$v = \frac{x_A}{t_A} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}. \quad (2)$$

Esta relación puede ser fácilmente invertida para obtener:

$$k = \sqrt{\frac{v + 1}{1 - v}}. \quad (3)$$

El lector quizás recuerde que la expresión (3) es la correspondiente al corrimiento Doppler radial en su expresión relativista. Haciendo (hágalo) un desarrollo en serie de Taylor se llega a la (más conocida) expresión clásica.

Puede demostrarse (tarea para el lector) que:

1. $v = 0 \iff k = 1$. Como es de esperar para observadores en reposo, una vez que la sincronización de relojes (perfectos) se realizó, ésta se mantiene.

2. Cambiar de signo la velocidad relativa entre observadores se ve reflejado en que $k \rightarrow 1/k$.

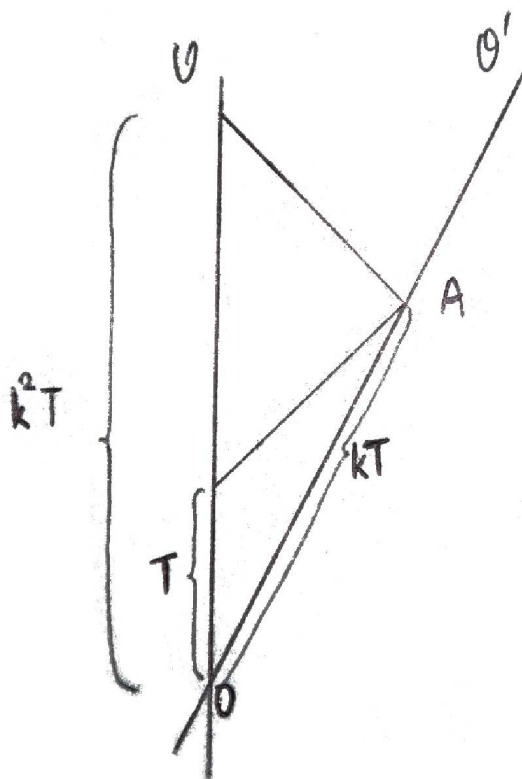


Figura 11: El factor k : relación con la velocidad relativa entre observadores.

E. Transformaciones de Lorentz a partir de un diagrama espaciotemporal.

Aquí presentaremos una forma alternativa de derivar las transformaciones de Lorentz. Nuestra herramienta serán los diagramas espaciotemporales y algunos de los resultados que involucran al factor k recientemente introducido.

Consideremos al evento E con coordenadas (t, x) y (t', x') según los observadores \mathcal{O} y \mathcal{O}' respectivamente como se puede ver en la figura 12. Supondremos que ambos observadores se mueven con velocidad relativa v y que han sincronizado sus relojes al encontrarse (evento O en la figura 12).

Para enviar una señal luminosa que arribe a E en el instante t el observador \mathcal{O} deberá hacerlo cuando su reloj indique un tiempo $t - x$ y recibirá el reflejo cuando su reloj marque $t + x$. El mismo análisis es válido para el observador primado \mathcal{O}' simplemente primando las coordenadas. Los resultados que derivamos previamente nos dan las siguientes relaciones:

$$t' - x' = k(t - x) \quad t + x = k(t' + x').$$

Después de algo de álgebra (a cargo del lector) y utilizando las relaciones (2) y (3) se obtienen las leyes de transformación deseadas:

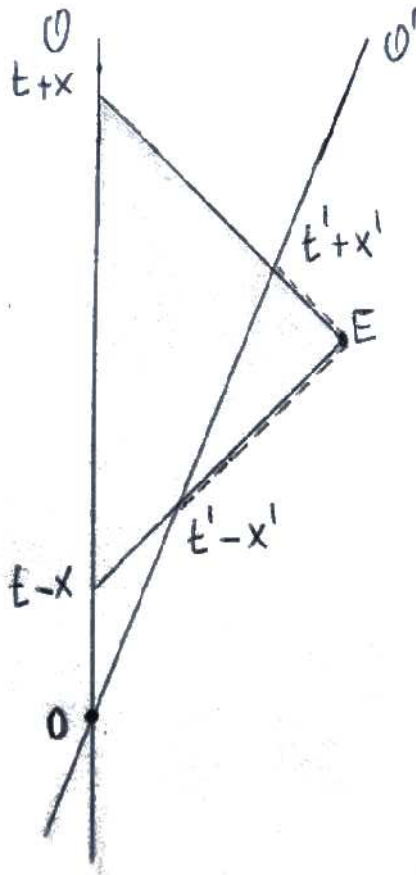


Figura 12: Modo alternativo para derivar las transformaciones de Lorentz.

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4)$$

F. Ley de adición de velocidades a partir de un diagrama espaciotemporal.

Para estudiar este problema debemos pensar en tres observadores diferentes en movimiento relativo a los que denominaremos \mathcal{O} , \mathcal{O}' y \mathcal{O}'' . Supondremos que sus respectivas velocidades relativas son $v_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ y $v_{\mathcal{O}'\mathcal{O}''}$, queremos obtener $v_{\mathcal{O}\mathcal{O}''}$.

Como podemos ver de la figura 13 existe una relación simple entre los factores k dada por:

$$k_{\mathcal{O}\mathcal{O}''} = k_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} k_{\mathcal{O}'\mathcal{O}''}.$$

Usando esta relación y la expresión (2) el lector podrá, sin grandes dificultades obtener la expresión deseada:

$$v_{\mathcal{O}\mathcal{O}''} = \frac{v_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + v_{\mathcal{O}'\mathcal{O}''}}{1 + v_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} v_{\mathcal{O}'\mathcal{O}''}}. \quad (5)$$

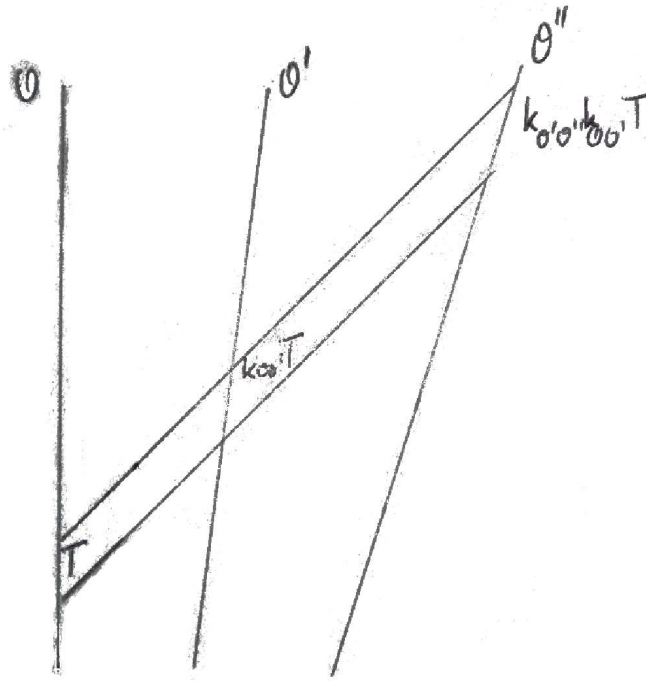


Figura 13: El factor k : relación entre 3 diferentes observadores inerciales.

Como actividades simples se le plantean al lector lo siguiente:

1. Obtener la ley Galileana de adición de velocidades.
2. Demostrar que si se *suman* dos velocidades menores a la de la luz se obtiene en cualquier caso otra menor que la de la luz. En concordancia con el postulado que dicha velocidad es un límite que no puede ser alcanzado (sin que esto invalide la potencial existencia de partículas que *siempre* se hayan movido con velocidades mayores a la de la luz en el vacío, los *taquiones*.)
3. Si tomamos el caso extremo (y correcto desde un punto de vista puramente formal) en el que $v_{O'O''} = 1$ es decir que estamos representando el valor de la velocidad de la luz *medido por O'*, entonces $v_{OO''} = 1$. En concordancia con el postulado de que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales.

VII. LA PARADOJA DE LOS GEMELOS EN UN DIAGRAMA ESPACIOTEMPORAL

A. Sobre las paradojas

Para comenzar con la discusión de esta conocida situación paradójica tratemos de dar una idea acabada de lo que entendemos como una paradoja.

Primero que todo, una paradoja es una construcción del hombre, que pensando sobre algún fenómeno llega a una conclusión que le genera conflictos con sus saberes o su intuición. Las paradojas son, generalmente, pensadas como juegos que desafían nuestra capacidad de razonamiento. En las “Lectures on Physics”, Richard Feynman aclara que *en el marco de una teoría física* “una paradoja es simplemente un conflicto entre la realidad y nuestra intuición de lo que la realidad debería ser”.

Hay un gran listado de paradojas de muy diversa naturaleza:

- Paradoja de Russell: ¿Existe el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos?
- ¿Qué pasa cuando Pinocho afirma “ahora mi nariz va a crecer”?
- La familia de paradojas de Zenón.
- La paradoja de Olbers.
- La paradoja de los gemelos.
- La lista sigue...

B. La paradoja de los gemelos

Ahora centremos nuestra atención en la llamada paradoja de los gemelos que pasamos a describir en detalle.

Esta conocida paradoja supone dos gemelos a los que llamaremos Héctor y Gustavo. Cuando cumplen 20 años uno de ellos (Héctor) comienza un viaje en una nave espacial mientras que Gustavo se queda en Tierra. La nave espacial en la que está Héctor se mueve con una velocidad $v = \frac{3}{5}c$ (dejamos de usar coordenadas geométricas por un momento y representamos distancias espaciales en años luz e intervalos temporales en años de modo que los fotones sigan describiendo rectas a 45 grados en nuestros diagramas espaciotemporales) durante 5 años (medidos desde Tierra) y rápidamente emprende el regreso para encontrarse con su hermano. El diagrama espaciotemporal de ambos hermanos (visto por el que se queda en la Tierra) se puede ver en la figura 14.

Una observación importante para hacer es que la velocidad de la nave espacial disminuye (y luego vuelve a aumentar) de forma instantánea para que la misma pase de $v_{al} = \frac{3}{5}c$ a $v_{ac} = -\frac{3}{5}c$ cuando en la Tierra $t = 5$ años. En la figura 14 se presentan además de las tajadas temporales correspondientes a cada año entre 0 y el punto de regreso y entre éste y el retorno

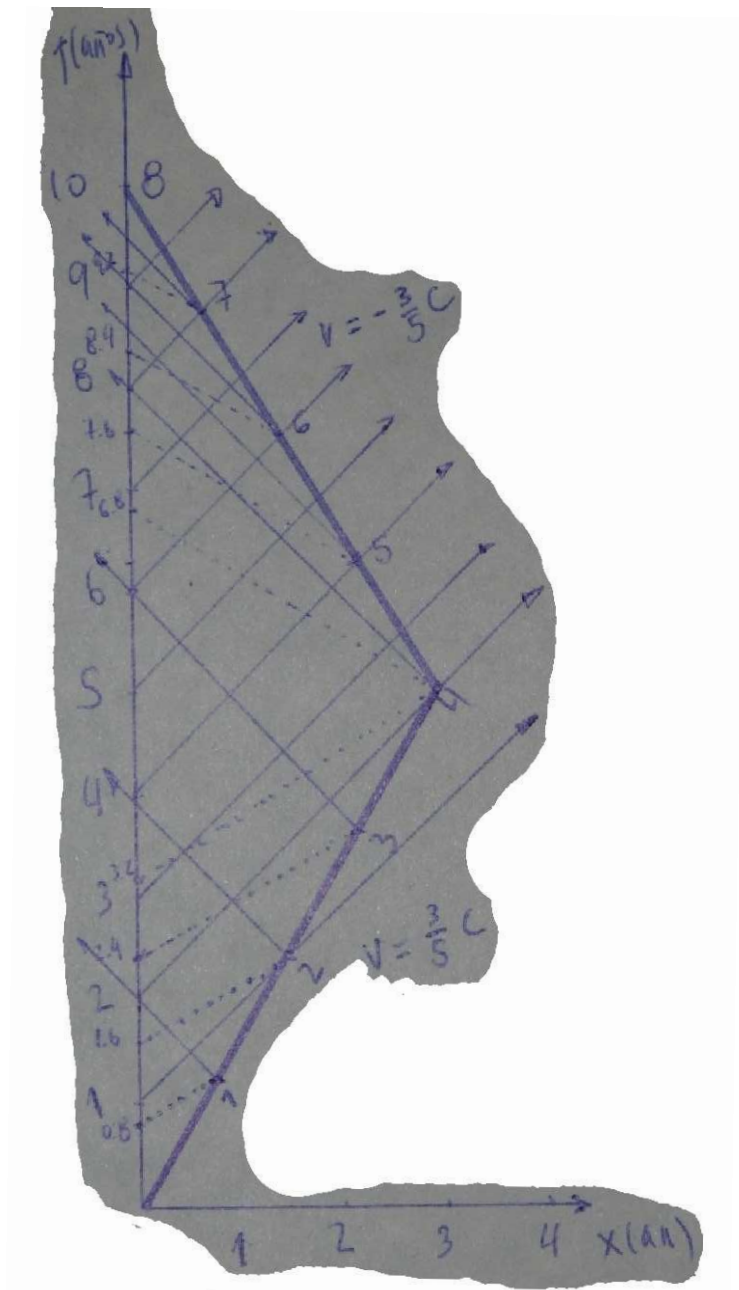


Figura 14: La paradoja de los gemelos en un diagrama espaciotemporal visto por el observador que se queda en Tierra. Vemos las líneas de tiempo para ambos observadores. Podemos ver que Héctor alcanza su destino a 3 años luz de distancia de la Tierra en 5 años pero su reloj avanzó (solamente) 4. Con líneas continuas se indican señales luminosas enviadas por cada uno de los gemelos cada vez que su reloj propio marca un año (la flecha indicará que gemelo la ha enviado), además con línea punteada se indican tajadas de tiempo constante para el viajero y su correspondiente intersección con la línea de mundo de Gustavo.

a Tierra (notar el brusco cambio en la pendiente de las mismas en el punto medio) con líneas a trazos.

Podemos ver que al regresar Héctor tiene 28 años mientras que Gustavo acaba de cumplir 30.

Ahora, mientras Héctor se mueve a velocidad constante ambos coinciden en que ven *al otro* envejecer más lentamente ya que cuando Héctor cumple sus 24 años ve que Gustavo tiene *solamente* 23.2 años.

Pero durante el momento en que Héctor comienza a frenar para luego comenzar el regreso deja de ser cierto que ambos observadores están subidos a un sistema de referencia inercial ya que la velocidad de Héctor (vista por Gustavo) está cambiando con el tiempo. Así durante el instante $t = 5$ años las tajadas temporales de Héctor cambian su pendiente rápidamente (manifestando el cambio en la velocidad) por lo que Héctor ve que un instante su hermano envejece 3.2 años. Este fenómeno no es visto por Gustavo ya que sus tajadas temporales nunca cambian de dirección.

Entonces, ¿hay paradoja o no?

Algo que no podemos dejar de notar es que el gemelo viajero sufre al emprender su retorno a Tierra una aceleración (el hecho de que en este ejemplo la misma sea infinita, por lo que es físicamente inaceptable, se puede relajar, a costa de complicar los cálculos sin que esto redunde en una mejor conceptualización del problema que queremos abordar) por lo que sus experiencias son efectivamente diferentes. Lo que sería inaceptable es que cada uno de los gemelos arribe a conclusiones diferentes en relación a lo que debe suceder cuando se reencuentren.

Volvamos a analizar el viaje desde la mirada de Gustavo. Las líneas de simultaneidad para él son líneas horizontales. Ambos gemelos envían señales luminosas cuando sus relojes marcan el paso de un año. Note que Héctor recibe únicamente dos de estas señales mientras se está alejando de Gustavo y 8 en el viaje de regreso, es decir un total de 10 señales. Gustavo, recibe las 4 señales que le envía Héctor en su regreso en solamente 2 años. Entonces, Gustavo recibe señales a una tasa de una cada dos años durante los 8 primeros años y la misma cambia a 2 cada año en los 2 años finales, es decir recibe, en total 8 señales luminosas enviadas por Héctor. Un análisis similar muestra que las 10 señales luminosas que recibe Héctor se distribuyen en tasas de 1 cada dos años durante los primeros 4 años y luego dos por año durante los 4 años que tarda el viaje de regreso. Así vemos que ambos gemelos coinciden en la tasa de recepción de señales luminosas en cada uno de los tramos del viaje de Héctor. La diferencia está en el porcentaje del tiempo en que cada uno de ellos recibe señales con baja frecuencia ($\frac{1}{2}$) y alta (2).

El lector podrá notar que se puede llegar a esta conclusión sin importar la velocidad con la que el gemelo viajero realice su viaje. Puede mostrarse que la tasa media de recepción de mensajes (es decir el cociente entre la correspondiente a la ida y la correspondiente al regreso) para Héctor es mayor que para Gustavo, así queda claro que Héctor recibirá más mensajes de Gustavo que los que él le enviará a su hermano llevándolo a la conclusión de que al encontrarse nuevamente con Gustavo él deberá ser más viejo, totalmente de acuerdo con lo que Gustavo espera que ocurra.

Actividad propuesta: Realice un diagrama espaciotemporal donde se muestre la misma información que la presentada en la figura 14 pero ahora desde el punto de vista de un

observador que acompaña a Héctor en su viaje de ida pero que no emprende el retorno con él. Confirme que él también llegará a la conclusión de que al volver Héctor será 2 años más joven que Gustavo.

VIII. ALGUNAS CUESTIONES FILOSÓFICAS

Veamos algunas cuestiones que se desprenden del trabajo que vinimos desarrollando en este breve apunte.

A. La cuarta dimensión

Analicemos la siguiente afirmación que suele aparecer en muchos textos “el tiempo es la cuarta coordenada”. ¿Cuál es el significado de esta frase? o quizás mejor aún, ¿cómo debemos interpretarla?

¿Significa acaso que el tiempo es como las otras dimensiones espaciales?, ¿qué piensa el lector? Antes de seguir con la lectura unos minutos de debate con sus compañeros de estudio es altamente recomendable.

Pensemos que si el tiempo fuese *estrictamente* equivalente a las coordenadas espaciales esto significaría que cualquiera de nosotros debería poder *moverse* a lo largo de esta coordenada del mismo modo que podemos hacerlo en las espaciales, sabemos que esto no es así, la estructura misma del cono de luz, de enorme importancia en la teoría muestra cabalmente esta diferencia. Sin embargo, en este breve apunte hemos descrito la importancia de los diagramas espaciotemporales para comprender a la teoría especial de la relatividad y alguna de sus consecuencias más importantes, por lo que algunos aspectos del tiempo deben ser similares a los del espacio y viceversa.

Como dijimos anteriormente lo que podemos afirmar es que las tres coordenadas espaciales y el tiempo conforman una variedad de 4 dimensiones, el espaciotiempo, y que para poder ubicar un punto (evento) en él es necesario dar sus cuatro coordenadas. En este sentido sí el tiempo es la cuarta dimensión.

No podemos dejar de recordar que la relatividad de la simultaneidad entre eventos hace que espacio y tiempo estén entrelazados.

B. El sentido común

Una de las cosas que quizás aprendimos (casi sin querer o sin notarlo) es que no siempre podremos confiar en nuestro sentido común a la hora de intentar desarrollar una teoría científica.

Tratemos de ver el (o alguno de sus) motivo(s).

Vamos a suponer que tomamos como válidas las siguientes proposiciones (nuestras *premisas*):

P1. Como podemos confiar en que el sentido común nos servirá como guía hacia la verdad el mismo no nos permitirá asegurar que algo sea falso.

P2. Nuestro sentido común nos asegura que tanto reglas como relojes funcionan de igual forma se estén o no moviendo.

P3. De la teoría especial de la relatividad se desprende que las reglas se contraen y los relojes hacen tic más lento si están en movimiento.

Usando la premisa P2. y la P3. podemos concluir que:

C1. El sentido común nos permite asegurar la falsedad de proposiciones.

Ahora usando la premisa P1. y nuestra afirmación A1. concluimos que:

A2. No podemos confiar en que el sentido común nos sirva como guía hacia la verdad.

Así podemos ver que, al menos en algunos casos (como la mecánica cuántica, la electrodinámica cuántica, etc.), nuestro sentido común no es un buen guía para el desarrollo de teorías. Igualmente este razonamiento, como otros, debe ser analizado en forma cuidadosa ya que como sabemos el valor de verdad de nuestro conjunto de premisas a partir de las cuales desarrollaremos nuestra argumentación es central. Como sabemos podemos demostrar cualquier cosa a partir de premisas que no son verdaderas. Por ejemplo veamos como a partir de un conjunto de premisas que no son todas verdaderas podemos obtener una conclusión que si lo es:

P1. Todos los peces viven en el agua.

P2. Las ballenas son peces.

Usando nuestras dos premisas obtenemos la siguiente conclusión:

A1. Las ballenas viven en el agua.

Pero del mismo modo, a partir de premisas falsas podemos, también obtener, conclusiones falsas, como lo muestra este razonamiento:

P1. Todos los insectos tienen seis patas.

P2. Las arañas son insectos.

Usando nuestras dos premisas obtenemos la siguiente conclusión:

A1. Las arañas tienen seis patas.

Por este motivo, remarcamos la importancia de estudiar el valor de verdad de nuestras premisas.

A modo de cierre hacemos notar que en relación a la electrodinámica cuántica, su creador, Richard Feynman remarca: “La teoría de la electrodinámica cuántica describe a la naturaleza de modo absurdo para el sentido común. La teoría está en concordancia total con los experimentos. Es por esto que espero que aceptes a la naturaleza como es: absurda”.

IX. ALGUNAS LECTURAS

- *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*, Hermann Bondi, Dover Publications Inc., New York, (1980)
- *Spacetime Physics: An Introduction to Special Relativity*, segunda edición, Edwin F. Taylor y John Archibald Wheeler, W. H. Freeman and Company, New York, (1992)
- *An introduction to space-time diagrams*, N.D. Mermin, Am. J. Phys., **65** (6), 476, (1997)

- *General Relativity: An Introduction for Physicists*, M.P. Hobson, G.P. Efstathiou y A.N. Lanseby, Cambridge University Press, New York, (2006)
- *Special Relativity properties from Minkowski diagrams*, N. Penha y B. Rothenstein, arXiv:physics/0703002 (2007)
- *A First Course in General Relativity*, segunda edición, Bernard Schutz, Cambridge University Press, New York, (2009)
- *On The Intrinsically Ambiguous Nature of Space-Time Diagrams*, Elie During, Spontaneous Generations: A Journal for the History and Philosophy of Science, **6**, 1, 160, (2012)