

Apéndice 1

La simetría del toroide

0.1. Introducción.

La determinación de los campos electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ y magnetostático $\vec{B}(\vec{r})$ puede abordarse con relativa sencillez analítica cuando la simetría de la distribución de fuentes lo permite. En cursos de física básica, las leyes de Coulomb y Biot-Savart se presentan como universalmente válidas para determinar $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{B}(\vec{r})$ respectivamente en todo el espacio. Sin embargo, sólo son utilizadas en puntos con ciertos privilegios de simetría. Por otra parte, las leyes de Gauss y Ampere se presentan como herramientas útiles en la determinación de los campos respectivos, cuando la distribución posee ciertas simetrías. Observemos que en cualquiera de los casos, la existencia de simetrías permite abordar analíticamente el problema. Sin embargo, la simetría no suele ser un concepto sobre el que se reflexione demasiado en los cursos básicos de física. En este trabajo, presentamos un ejemplo que permite explorar la potencialidad del concepto de simetría, en relación con las leyes de la magnetostática. No presentaremos aquí resultados novedosos, sino un enfoque alternativo para la derivación de resultados clásicos (aunque tal vez algunos puedan resultar algo extraños).

Los sistemas que analizamos son aquellos que pueden obtenerse mediante la deformación continua de un toroide, preservando su simetría azimutal. Los sistemas obtenidos de esta forma, decimos que poseen la topología del toroide. En la sección 0.2, definimos con precisión las características del sistema a estudiar y determinamos a través de las reglas de simetría, la forma general del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$. En la sección 0.3 determinamos el campo $\vec{B}(\vec{r})$ en todo el espacio. En las secciones siguientes analizamos diferentes ejemplos que admiten ser abordados con la teoría general desarrollada.

0.2. Simetría del campo de inducción magnética.

Consideremos una curva plana simple cerrada C arbitrariamente elegida, y una recta contenida en el plano de la curva C que no la corta. Si hacemos girar el plano alrededor de la recta, la curva C genera una superficie S de revolución (es decir, de simetría azimutal), con la topología del toro. Observe que S es una superficie cerrada que limita un volumen V no simplemente conexo. Ahora consideremos que una colección de N espiras idénticas con la forma de la curva C se distribuyen equiespaciadamente sobre S , de manera que cada una de ellas se encuentre en un plano que contenga al eje de simetría. Si N es suficientemente grande, y por cada espira circula una corriente i , vale considerar un modelo con distribución superficial de corriente con simetría azimutal magnética¹. Esto es, en coordenadas cilíndricas ρ' , ϕ' y z' ,

$$\vec{\kappa}(\vec{r}') = \kappa_\rho(\rho', z') \check{\rho} + \kappa_z(\rho', z') \check{k} \quad (1)$$

donde el eje z ha sido elegido de modo que coincida con el eje de simetría del sistema.

Con el fin de analizar la simetría del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$, elegimos un punto P genérico, que podría ser tanto interior como exterior a la superficie S . Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el eje x de modo que contenga al punto P . Entonces la posición de P será

$$\vec{r} = x \check{i} \quad (2)$$

¹Aquí utilizamos el término "magnética" para indicar que la propiedad simétrica requiere la especificación de una orientación. En este caso, la orientación de la corriente.

Para visualizar la simetría, conviene utilizar componentes cartesianas, por lo que las componentes de la densidad superficial de corriente $\vec{\kappa}(\vec{r})$ serán

$$\begin{aligned}\kappa_x(x', y', z') &= \kappa_\rho(\rho', z') \cos(\phi') \\ \kappa_y(x', y', z') &= \kappa_\rho(\rho', z') \sin(\phi') \\ \kappa_z(x', y', z') &= \kappa_z(\rho', z')\end{aligned}\quad (3)$$

En adelante, utilizaremos coordenadas cartesianas o cilíndricas indistintamente, por lo que entenderemos que x' , y' y z' identifican el mismo punto que ρ' , ϕ' y z' . La forma diferencial de la ley de Biot y Savart, escrita para una distribución superficial de corriente es

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu_0 \vec{\kappa}(\vec{r}') ds \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4)$$

donde \vec{r} representa el punto campo y \vec{r}' el punto fuente. Consideremos dos elementos de la superficie S situados en posiciones simétricas a cada lado del plano XZ . Esto es

$$\begin{aligned}\vec{\kappa}(\vec{r}'_1) ds \quad \text{con} \quad \vec{r}'_1 &= x' \check{i} + y' \check{j} + z' \check{k} \\ \vec{\kappa}(\vec{r}'_2) ds \quad \text{con} \quad \vec{r}'_2 &= x' \check{i} - y' \check{j} + z' \check{k}\end{aligned}\quad (5)$$

Para evaluar la contribución de ambos elementos al campo \vec{B} en el punto P , observemos que

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}'_1 &= (x - x') \check{i} - y' \check{j} - z' \check{k} \quad \rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}'_1| = [(x - x')^2 + y'^2 + z'^2]^{1/2} = D \\ \vec{r} - \vec{r}'_2 &= (x - x') \check{i} + y' \check{j} - z' \check{k} \quad \rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}'_2| = [(x - x')^2 + y'^2 + z'^2]^{1/2} = D\end{aligned}\quad (6)$$

donde D se ha introducido para compactar la notación, a la vez que denota que las distancias desde cada elemento elegido al punto P son iguales. Entonces, la suma de las contribuciones será

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}'_1) + d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}'_2) = \frac{\mu_0}{4\pi D^3} \left[\vec{\kappa}(\vec{r}'_1) ds \times (\vec{r} - \vec{r}'_1) + \vec{\kappa}(\vec{r}'_2) ds \times (\vec{r} - \vec{r}'_2) \right] \quad (7)$$

La simetría impone que

$$\begin{aligned}\phi'_2 &= -\phi'_1 \\ \kappa_\rho(\rho'_2, z'_2) &= \kappa_\rho(\rho'_1, z'_1) \\ \kappa_z(\rho'_2, z'_2) &= \kappa_z(\rho'_1, z'_1)\end{aligned}\quad (8)$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned}\kappa_x(x', y', z') &= \kappa_x(x', -y', z') = \kappa_{x1} \\ \kappa_y(x', y', z') &= -\kappa_y(x', -y', z') = \kappa_{y1} \\ \kappa_z(x', y', z') &= \kappa_z(x', -y', z') = \kappa_{z1}\end{aligned}\tag{9}$$

donde κ_{x1} , κ_{y1} y κ_{z1} han sido introducidos para compactar la notación. Utilizando la forma simbólica habitual para el producto vectorial, tenemos

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}_1) + d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}_2) = \frac{\mu_0 ds}{4\pi D^3} \left(\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \kappa_{x1} & \kappa_{y1} & \kappa_{z1} \\ x - x' & -y' & -z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \kappa_{x1} & -\kappa_{y1} & \kappa_{z1} \\ x - x' & y' & -z' \end{vmatrix} \right)\tag{10}$$

Obsérvese que los signos de las segundas columnas de los productos vectoriales son opuestos, por lo que sólo sobrevive la componente y . Esto es

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}_1) + d\vec{B}(\vec{r}, \vec{r}_2) = \frac{\mu_0 ds}{2\pi D^3} (z' \kappa_{x1} - x' \kappa_{z1}) \check{j}\tag{11}$$

Entonces, la contribución de ambos elementos en el punto P sólo tiene componente y . Como todas las contribuciones pueden tomarse de a pares, concluimos que el campo en P sólo tiene componente y . Obsérvese además que el punto P ha sido elegido arbitrariamente, por lo que el resultado anterior puede extenderse a todo el espacio. Dada la simetría azimutal del sistema y notando que en P se cumple que los versores \check{j} y $\check{\phi}$ coinciden, concluimos que el campo de inducción magnética en todas partes es de la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho, z) \check{\phi}\tag{12}$$

0.3. Determinación del campo de inducción magnética.

De la relación (12), puede deducirse que las líneas del campo \vec{B} son circunferencias con centro en el eje z , contenidas en planos perpendiculares a dicho eje. A continuación calculamos la circulación de \vec{B} sobre sus líneas de campo LC , eligiendo $d\vec{l} = \rho d\phi \check{\phi}$. Esto es

$$\oint_{LC} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_0^{2\pi} B_\phi(\rho, z) \check{\phi} \cdot \rho d\phi \check{\phi} = 2\pi\rho B_\phi(\rho, z)\tag{13}$$

Con este resultado podemos aplicar la ley de Ampere, distinguiendo dos situaciones cualitativamente diferentes. Esto es, si la curva LC es interior exterior a la superficie S . Recordando que

$$\oint_{LC} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{LC} \quad (14)$$

donde I_{LC} representa la corriente neta que atraviesa una superficie limitada por la curva LC , considerando positivas las contribuciones orientadas en el sentido positivo del eje z . Con esto se tiene que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i N}{2\pi\rho} \hat{\phi} & \text{si } \vec{r} \text{ es interior a } S \\ 0 & \text{si } \vec{r} \text{ es exterior a } S \end{cases} \quad (15)$$

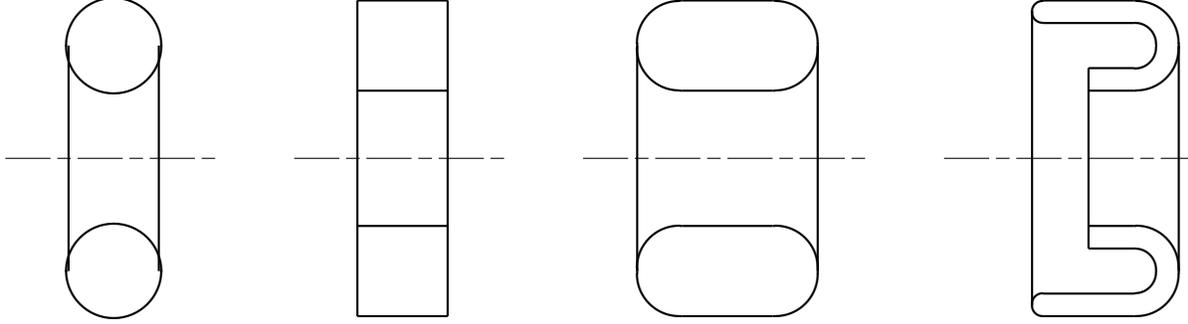
Obsérvese que este resultado se pudo deducir sin utilizar información acerca de la forma detallada de la curva C . Por tanto es aplicable a cualquier sistema que respete la simetría propuesta. En las secciones siguientes presentamos aplicaciones, algunas muy conocidas y otras algo extrañas...

0.4. Objetos con la topología del toroide.

Cuando la curva C es una circunferencia, la superficie S es un toro. Si sobre S se distribuyen N espiras circulares equiespaciadas, tal como se propuso en la sección 0.2, decimos que el dispositivo así construido es un toroide. Cualquier dispositivo construido con las mismas reglas, para formas arbitrarias de la curva C se dice que tiene la topología del toroide. En la figura mostramos varios ejemplos de objetos con la misma topología. Cuando por cualquiera de ellos circula una corriente i , el campo de inducción magnética \vec{B} viene dado por la expresión (17).

0.5. Cable coaxil recto.

Si la curva C es un rectángulo con un par de lados mucho más largos que el otro, y el eje de simetría se elige paralelo y cercano a uno de los lados largos, obtenemos un objeto análogo a un cable coaxil unido por sus extremos. En este caso, el objeto real no posee espiras diferenciadas, sino que las mismas se funden en un continuo conductor, que puede reinterpretarse como dos



tubos coaxiales de radios R_1 (interior) y R_2 (exterior), ambos de longitud L y unidos por sus extremos mediante coronas circulares conductoras. En relación con la expresión (17), podemos interpretar este límite como el caso en que N tiende a infinito, a la vez que i tiende a cero, de manera que el producto iN se mantenga constante. Esto es

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ i \rightarrow 0}} iN = I \quad (16)$$

colocando el origen de coordenadas en el centro del montaje tenemos

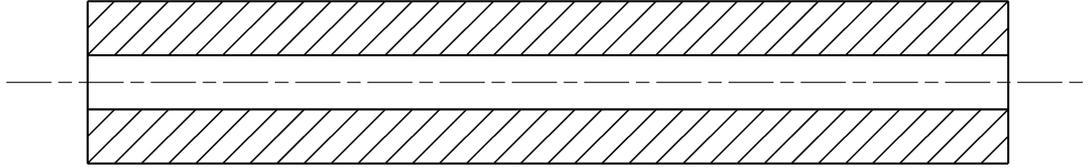
$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \check{\phi} & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \text{ y } -L/2 < z < L/2 \\ 0 & \text{en cualquier otro lugar} \end{cases} \quad (17)$$

Nótese que esta expresión es análoga a la que se obtiene usando la ley de Ampere, cuando el coaxil es infinitamente largo. En tal sentido, el presente análisis constituye una extensión del resultado clásico, válida para sistemas de longitud finita, que incluye los efectos de borde.

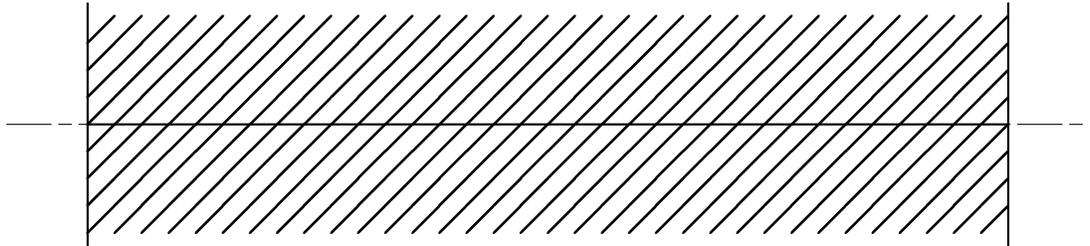
0.6. Conductor recto infinitamente largo.

Siguiendo el lineamiento desarrollado para el cable coaxil, podemos suponer ahora que R_1 tiende a cero al tiempo que R_2 tiende a infinito. Para este caso, el campo \vec{B} toma la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \check{\phi} & \text{si } -L/2 < z < L/2 \\ 0 & \text{si } z < -L/2 \text{ o } L/2 < z \end{cases} \quad (18)$$



Nótese que este montaje genera un campo análogo al de un hilo infinito, en la región contenida entre las tapas. Este resultado tiende al campo \vec{B} correcto cuando L tiende a infinito, mientras que en los casos con L finito constituye un resultado no abordable con las condiciones de simetría cilíndrica.



0.7. Solenoide.

Analizamos ahora otro límite para la misma simetría. Consideremos nuevamente la curva C para generar una superficie S de revolución alrededor del eje z . Sean ρ_1 y ρ_2 las distancias mínima y máxima entre el eje z y la curva C . Entonces, en la región interior a la superficie S , el módulo de \vec{B} cumple que

$$\frac{\mu_0 i N}{2\pi \rho_2} < B < \frac{\mu_0 i N}{2\pi \rho_1} \quad (19)$$

Una forma adecuada de definir la densidad de espiras por unidad de longitud en el montaje es

$$n = \frac{N}{2\pi\rho_1} \quad (20)$$

Introducimos $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, con lo que la desigualdad (19) se convierte en

$$\frac{\mu_0 i n}{1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_1}} < B < \mu_0 i n \quad (21)$$

Ahora estamos en condiciones de realizar el límite en que ρ_1 tiende a infinito, manteniendo constante n y $\Delta\rho$. En estas condiciones, la desigualdad (21) conduce a un único valor de B , a la vez que el montaje toma el aspecto local de un "solenoides". Recordando que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\check{\phi}$, en el límite tenemos que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 i n \check{u} \quad (22)$$

donde \check{u} es un versor localmente coincidente con $\check{\phi}$, pero contenido sobre una rcta a lo largo del solenoides. Nótese que el resultado obtenido coincide con lo esperado. Sin embargo, ha sido posible obtener este resultado sin utilizar información acerca de la forma detallada de la curva C . Por ello, este resultado constituye una extensión a "solenoides cuyas espiras tengan formas arbitrarias".