

Mecánica Cuántica - Curso 2017

Práctica N° 7: Propiedades de Operadores

1. El operador de traslación $\Omega(a)$ está definido por

$$\Omega(a)\psi(x) = \psi(x + a)$$

Muestre que:

- $\Omega(a)$ puede expresarse en términos del operador $p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$,
 - $\Omega(a)$ es unitario.
2. Considere el operador paridad P , tal que $P\psi(x) = \psi(-x)$.
- Determine P^2 y P^{-1} .
 - Encuentre las autofunciones y los autovalores de P .
 - Muestre que P es unitario.
 - Analice las propiedades de paridad de las funciones de onda en el caso en que el potencial $V(x)$ sea una función par de x y el espectro de energías es no degenerado.
3. Verificar las siguientes propiedades de conmutadores de operadores:
- $[A, B] = -[B, A]$
 - $[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$
 - $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$
 - $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
4. Muestre que si A y B son operadores que satisfacen $[[A, B], A] = 0$, se cumple $[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B]$.
5. ^(†) Considerar la ecuación de Schrödinger para un potencial complejo $V(x) = V_1(x) + iV_2(x)$, donde $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son funciones reales.
- Derivar la ecuación de continuidad con este potencial y encontrar los términos adicionales que aparecen cuando $V_2 \neq 0$.
 - ¿El Hamiltoniano es hermitico? ¿Puede dar una interpretación física del resultado? ¿Qué uso posible piensa que tendría este tipo de potencial?
6. Considere dos operadores \hat{O} y \hat{P} cuyo conmutador puede escribirse como:

$$[\hat{O}, \hat{P}] = i\hat{C},$$

donde $\hat{C} = \hat{C}^\dagger$.

Demuestre que:

$$\Delta\hat{O}^2 \Delta\hat{P}^2 \geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2,$$

donde $\Delta\hat{O}^2$ y $\Delta\hat{P}^2$ son las dispersiones cuadráticas de los operadores \hat{O} y \hat{P} respectivamente y $\langle \hat{C} \rangle$ el valor medio del operador \hat{C} .

A partir de esta relación, deduzca la relación de incerteza para x y p_x .

7. Tiene un operador \hat{A} que satisface la ecuación cuadrática

$$\hat{A}^2 - 2\hat{A} + 2 = 0, \quad (1)$$

Obtenga los autovalores y autofunciones de \hat{A} y pruebe que es un observable.

Ejercicios opcionales

8. Para un dado sistema, el operador asociado al observable A no conmuta con el Hamiltoniano del sistema. Se sabe que los autovalores asociados al operador \hat{A} son a_{\pm} y que sus respectivas autofunciones son $\phi_{\pm} = (u_{+} \pm u_{-})/\sqrt{2}$ donde u_{\pm} son los autoestados del Hamiltoniano cuyos autoenergías son E_{\pm} respectivamente. Si el sistema se encuentra a $t = 0$ en el estado $\psi = \phi_{+}$, obtenga la evolución temporal del valor de expectación de \hat{A} .
9. Para una partícula moviéndose en un campo magnético encuentre las reglas de conmutación entre las componentes cartesianas de su velocidad.
10. Considere los operadores

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + ip/m\omega) \quad a^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - ip/m\omega)$$

- a) Calcule $[a, a^{\dagger}]$
- b) Definido $N = a^{\dagger}a$ encuentre la relación con el Hamiltoniano del oscilador armónico.
- c) Denote con $|n\rangle$ y n a los autoestados y autovalores del operador número N . Obtenga los correspondientes al oscilador armónico como función de ellos.
- d) Calcule $[N, a]$ y $[N, a^{\dagger}]$.
- e) ¿Puede decir algo en relación a los kets $a^{\dagger}|n\rangle$ y $a|n\rangle$? En función de esto, ¿qué nombre les asignaría?
- f) Escriba $|n\rangle$ en función de $|0\rangle$.