Mecánica Cuántica - Curso 2016

Práctica N^o 7

Propiedades de Operadores

1. El operador de traslación $\Omega(a)$ está definido por

$$\Omega(a)\psi(x) = \psi(x+a)$$

Muestre que:

a) $\Omega(a)$ puede expresarse en términos del operador $p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$,
b) $\Omega(a)$ es unitario.

2. Considere el operador paridad P, tal que $P\psi(x) = \psi(-x)$.

a) Determine P^2 y P^{-1}.
b) Encuentre las autofunciones y los autovalores de P.
c) Muestre que P es unitario.
d) Analice las propiedades de paridad de las funciones de onda en el caso en que el potencial $V(x)$ sea una función par de x y el espectro de energías es no degenrado.

3. Verificar las siguientes propiedades de conmutadores de operadores:

a) $[A, B] = -[B, A]$
b) $[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$
c) $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$
d) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

4. Muestre que si A y B son operadores que satisfacen $[[A, B], A] = 0$, se cumple $[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B]$.

5. Considere dos operadores $\hat{\mathcal{O}}$ y $\hat{\mathcal{P}}$ cuyo conmutador puede escribirse como:

$$[\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{P}}] = i\hat{\mathcal{C}},$$

donde $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}^\dagger$.

Demuestre que:

$$\Delta\hat{\mathcal{O}}^2 \Delta\hat{\mathcal{P}}^2 \geq \frac{1}{4}\langle\hat{\mathcal{C}}\rangle^2,$$

donde $\Delta\hat{\mathcal{O}}^2$ y $\Delta\hat{\mathcal{P}}^2$ son las dispersiones cuadráticas de los operadores $\hat{\mathcal{O}}$ y $\hat{\mathcal{P}}$ respectivamente y $\langle\hat{\mathcal{C}}\rangle$ el valor medio del operador $\hat{\mathcal{C}}$.

A partir de esta relación, deduzca la relación de incerteza para x y p_x.

Ejercicios opcionales

6. Para un dado sistema, el operador asociado al observable A no conmuta con el Hamiltoniano del sistema. Se sabe que los autovalores asociados al operador $\hat{A}$ son $a_\pm$ y que sus respectivas autofunciones son $\phi_\pm = (u_+ \pm u_-)/\sqrt{2}$ donde $u_\pm$ son los autoestados del Hamiltoniano cuyos autoenergías son $E_\pm$ respectivamente. Si el sistema se encuentra a $t = 0$ en el estado $\psi = \phi_+$, obtenga la evolución temporal del valor de expectación de $\hat{A}$.

7. Para una partícula moviendose en un campo magnético encuentre las reglas de conmutación entre las componentes cartesianas de su velocidad.

8. Considere los operadores

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + ip/m\omega) \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - ip/m\omega)$$

   a) Calcule $[a, a^\dagger]$

   b) Definido $N = a^\dagger a$ encuentre la relación con el Hamiltoniano del oscilador armónico.

   c) Denote con $|n\rangle$ y n a los autoestados y autovalores del operador número N. Obtenga los correspondientes al oscilador armónico como función de ellos.

   d) Calcule $[N, a]$ y $[N, a^\dagger]$.

   e) ¿Puede decir algo en relación a los kets $a^\dagger|n\rangle$ y $a|n\rangle$? En función de esto, ¿qué nombre les asignaría?

   f) Escriba $|n\rangle$ en función de $|0\rangle$.