

Mecánica Cuántica - Curso 2016

Práctica N° 6

Aplicaciones del método WKB

1. El hamiltoniano de un oscilador armónico es

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2\omega^2x^2)$$

Calcule, utilizando la aproximación WKB, los niveles de energía del oscilador armónico y las respectivas funciones de onda (en la región entre puntos clásicos de retorno) para los primeros 5 niveles de energía, luego compare con los resultados exactos obtenidos en la práctica anterior.

2. Muestre que, en la aproximación de WKB, el coeficiente de transmisión para una partícula de masa m y energía E a través de una barrera de potencial $V(x)$, está dada por la expresión,

$$T = e^{-2L} \left(1 + \frac{1}{4}e^{-2L}\right)^{-2},$$

donde,

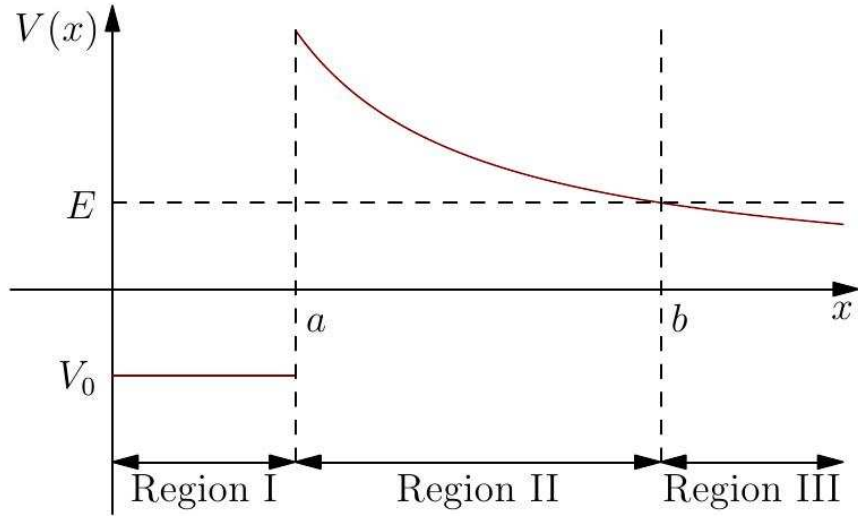
$$L = \frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx.$$

Aplique este resultado para el caso particular de una barrera de potencial parabólica, es decir:

$$V(x) = V_0(1 - x^2/x_0^2), \quad \text{si } |x| < x_0$$

$$V(x) = 0, \quad \text{si } |x| > x_0.$$

3. El problema del decaimiento α , proceso típico en núcleos pesados, puede estudiarse modelando al núcleo de radio a y carga Z como un pozo de ancho a y profundidad V_0 y considerando que para $x > a$ el potencial es Coulombiano (ver Figura 1). Calcule el coeficiente de transmisión T para el decaimiento de una partícula con $E > 0$ y carga eléctrica z .
4. Una partícula en un cristal unidimensional es libre de moverse en la región $-a < x < a$ pero sufre fuerzas armónicas más allá de dicha región. El potencial puede



modelarse como:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x - a)^2 & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x + a)^2 & \text{si } x < -a \end{cases} \quad (1)$$

Obtenga en la aproximación WKB los niveles de energía y analice el resultado en el límite $a \ll 1$.

- Imagine un metal “frío” sometido a un campo eléctrico externo, E_{ext} , en dirección tal que acelera electrones “hacia afuera” de la superficie. Los electrones “justo por debajo” de la superficie del metal se encuentran sometidas a la acción de un pozo de potencial de profundidad W (la función trabajo de la superficie). Asuma que el metal se ubica en la región $x < 0$ y que el campo eléctrico no penetra en esa región por lo que no afecta la energía de los electrones ubicados dentro del metal. Calcule, en la aproximación WKB la probabilidad de que los electrones sean emitidos desde la superficie del metal.