Mecánica Cuántica - Curso 2023

Práctica N^o 3: Sistemas Cuánticos Simples - I

1. Encuentre las soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial de la forma

   a) $V(x) = -a\delta(x)$

   b) $V(x) = +a\delta(x)$

   con $a > 0$. Muestre que en la parte a) existe un único estado ligado. Para una partícula incidente de masa μ y energía E, calcule el coeficiente de transmisión (T) y el de reflexión (R) ¿Qué pasa con R y T en el caso en que la energía es mayor que cero en el caso b)?

2. Considere partículas incidiendo desde el infinito con energía $E > 0$ bajo la acción del potencial dado por:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x-a), & \text{para } x > 0 \\ \infty, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

   donde g es positivo. Obtenga la ecuación que caracteriza la fase relativa de las ondas reflejadas. Luego, calcule los casos límites para energías grandes y pequeñas.

3. Encuentre las autofunciones y el espectro de energías para un pozo infinito de potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } |x| < a \\ \infty, & \text{para } |x| > a \end{cases}$$

   Considere una pelota de 1 gramo confinada a moverse en una región de ancho 1 centímetro. Determine en número cuántico si tiene una energía de 1 miliJoule. Además, calcule la energía necesaria para promover a la pelota al siguiente estado de energía. Discuta.

   Calcule la probablidad de encontrar a la partícula en el intervalo $-a/L < x < a/L$ y discuta el límite para grandes números cuánticos.

4. Muestre que, si la energía potencial $V(\vec{r})$ puede escribirse como suma de funciones de una sola coordenada cartesiana, $V(\vec{r}) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_3(x_3)$, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo puede descomponerse en un sistema de ecuaciones unidimensionales:

$$\frac{d^2\psi_i(x_i)}{dx_i^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E_i - V_{x_i}]\psi_i(x_i) = 0,\ i = 1, 2, 3$$

   con $\psi(\vec{r}) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)$, y $E = E_1 + E_2 + E_3$

5. Una partícula se mueve libremente dentro de una caja cuyos lados tienen longitudes a, b y c, con paredes impenetrables. Encuentre las autofunciones y los valores posibles de la energía. Comente sobre la eventual degeneración de las autofunciones.

6. Encuentre las energías de los estados ligados de una partícula en el pozo de potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{para } x < 0 \\ -V_0, & \text{para } 0 < x < a \\ 0, & \text{para } x > a \end{cases}$$

7. Un sistema se encuentra a $t = 0$ en un estado que es superposición de las dos autofunciones del Hamiltoniano que lo caracteriza. Se sabe que la probabilidad de encontrarlo en el estado de energía E_1 es 3 veces mayor que la de encontrarlo en el de energía E_2. Escriba la función de onda más general posible para el estado inicial que sea consistente con los datos anteriores. Luego determine si evolución temporal.