Mecánica Cuántica - Curso 2023

Práctica N^o 2: La Función de Onda

1. Considere, en el caso unidimensional, una solución $\psi(x)$ a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Demuestre que si satisface la condición $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ entonces dicha solución es no degenerada y por lo tanto real salvo una posible fase arbitraria.

2. Considere la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$\hat{H}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t).$$

Demuestre que la evolución temporal de un estado inicial $\psi(x,0)$ está dado por:

$$\psi(x,t) = \sum_k \exp(-iE_k t/\hbar)a_k\phi_k(x),$$

donde $\phi_k(x)$ y E_k son las autofunciones y autoenergías del Hamiltoniano, $\hat{H}$, y donde los coeficientes a_k están dados por:

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k^*(x)\psi(x,0)dx.$$

3. Considere una partícula de masa m, cuyo movimiento está confinado a la región unidimensional dada por $0 \leq x \leq x_c$. La misma está descripta, a $t = 0$ por la siguiente función de onda:

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5x_c}}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{x_c}x\right]\right)\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{x_c}x\right].$$

a) Muestre que la función de onda está correctamente normalizada.

b) Calcule la función de onda para $t > 0$.

4. Considere una partícula confinada al intervalo unidimensional $0 \leq x \leq L$. El estado inicial está caracterizado por la siguiente función de onda:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{L^5}}x(x - L).$$

Obtenga la probabilidad de que, luego de medir la energía, el sistema se encuentre en el autoestado con energía $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$.

Suponga que luego de realizar dicha medición se obtiene que la energía es E_3. ¿Cuál es el valor de la densidad de probabilidad en el punto $x = L/2$ luego de haber realizado dicha medida? Si la medida de energía no se hubiera realizado, ¿cuál sería dicho valor?

5. Considerar la ecuación de Schrödinger unidimensional en el caso de un potencial complejo $V(x) = V_1(x) + iV_2(x)$, donde $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son funciones reales.

   a) Derivar la ecuación de continuidad con este potencial y encontrar los términos adicionales que aparecen cuando $V_2 \neq 0$.
   b) ¿Puede dar una interpretación física del resultado? ¿Qué uso posible piensa que tendría este tipo de potencial?

6. Considere una partícula libre unidimensional, cuya función de onda en $t = 0$, está dada por:

$$\Psi(x,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{ikx} dk$$

   Este paquete de ondas se obtiene por la superposición de ondas planas e^{ikx} con coeficientes,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(k,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}$$

   que corresponde a una función gaussiana centrada en $k = k_0$. Debido a ello la función de onda se denomina gaussiana.

   Calcule:

   a) $\Psi(x,0)$

   b) $|\Psi(x,0)|^2$

   c) $\Delta x \cdot \Delta p$

   d) $\Psi(x,t)$

   e) el ensanchamiento del paquete de onda.

   f) Teniendo en cuenta que en el instante inicial el ancho del paquete es un cierto valor Δx y la expresión para el ancho del paquete como función del tiempo estime el tiempo en el cual el ancho se duplica en dos situaciones: a) un electrón confinado inicialmente a una región con tamaño comparable a la escala atómica y b) una partícula de 1 gramo y 1 centímetro de tamaño. Discuta.

   Nota: puede estudiar la mayor parte de este problema en la sección GI del libro 'Quantum Mechanics' de Cohen-Tannoudji, vol.1. El obtener las expresiones finales resulta algo complejo desde el punto de vista algebraico. Por ello, solo se busca entender el plateo y discutir los resultados.

7. Considere la siguiente superposición de ondas planas:

$$\psi_{k,\delta k}(x) = \left(2\sqrt{\pi \delta k}\right)^{-1} \int_{k-\delta k}^{k+\delta k} e^{iwx} dw,$$

   donde supondremos que $\delta k \ll k$.

   Demuestre que:

   a) Las funciones de onda $\psi_{k,\delta k}(x)$ están normalizadas y son ortogonales entre sí.

   b) Calcule el valor de expectación para el momento lineal y la energía para una partícula libre (realice los cáclulos a primer orden en δk).