Mecánica Cuántica - Curso 2017

Práctica N^o 2: La Función de Onda

1. Considere, en el caso unidimensional, una solución $\psi(x)$ a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Demuestre que si satisface la condición $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ entonces dicha solución es no degenerada y por lo tanto real salvo una posible fase arbitraria.

2. Considere, en el caso unidimensional, una partícula acotada que puede describirse con una función de onda $\psi(x,t)$ (no estamos suponiendo necesariamente un estado estacionario).

   a) Demuestre que, si el potencial es real

   $$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 0.$$

   b) Demuestre que, si la partícula se encuentra, en un cierto instante de tiempo, en un estado estacionario, entonces la evolución temporal de la función de onda no alterará el estado estacionario de la misma.

3. Considere una partícula de masa m, cuyo movimiento está confinado a la región unidimensional dada por $0 \leq x \leq x_c$. La misma está descripta, a $t = 0$ por la siguiente función de onda:

   $$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5x_c}}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{x_c}x\right]\right)\,\mathrm{sen}\left[\frac{\pi}{x_c}x\right].$$

   a) Muestre que la función de onda está correctamente normalizada.

   b) Calcule la función de onda para $t > 0$.

   c) Calcule el valor medio de la energía en cualquier instante de tiempo $t \geq 0$.

4. Considere

   $$\phi(k_x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{para } \bar{k}_x - \delta \leq k_x \leq \bar{k}_x + \delta \\ 0 & \text{para todos los otros valores de } k_x \end{cases}$$

   Calcule $\Psi(x,0)$, grafique $|\Psi(x,0)|^2$ para distintos valores de δ, y muestre que $\Delta x \Delta k_x \simeq 1$ es válida si Δx se toma como el ancho a la mitad del máximo.

5. Considere una partícula libre unidimensional, cuya función de onda en $t = 0$, está dada por:

   $$\Psi(x,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}\, e^{ikx}dk$$

   Este paquete de ondas se obtiene por la superposición de ondas planas e^{ikx} con coeficientes,

   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(k,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}}e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}$$

que corresponde a una función gaussiana centrada en $k = k_0$. Debido a ello la función de onda se denomina gaussiana.

Calcule:

a) $\Psi(x, 0)$

b) $|\Psi(x, 0)|^2$

c) $\Delta x \cdot \Delta p$

d) $\Psi(x, t)$

e) el ensanchamiento del paquete de onda.

f) en el instante $t = 0$, Δp es mínimo utilice, esta cantidad como definición de p_c el *impulso característico*, construya a partir de él una energía característica y luego un tiempo característico que servirá como indicador del tiempo en que el paquete de onda se *desarma*. Calcule explícitamente para el caso de un objeto con una masa de 1 gramo y 1 centímetro de tamaño. Discuta.

Nota: puede estudiar la mayor parte de este problema en la sección GI del libro 'Quantum Mechanics' de Cohen-Tannoudji, vol.1. El obtener las expresiones finales resulta algo complejo desde el punto de vista algebraico. Por ello, solo se busca entender el plateo y discutir los resultados.

6. Considere la siguiente superposición de ondas planas:

$$\psi_{k,\delta k}(x) = \left(2\sqrt{\pi \delta k}\right)^{-1} \int_{k-\delta k}^{k+\delta k} e^{ipx} dp,$$

donde supondremos que $\delta k \ll k$.

Demuestre que:

a) Las funciones de onda $\psi_{k,\delta k}(x)$ están normalizadas y son ortogonales entre sí.

b) Calcule el valor de expectación para el momento lineal y la energía para una partícula libre (realice los cáclulos a primer orden en δk).

NOTA: Deberá realizar integrales que involucran a la delta de Dirac, busque la relación que existe entre esa distribución y la escalón de Heaviside.