Práctica 2

Núcleo e Imagen de una transformación lineal

1. Dado un cuerpo K, sea $T : V \to V'$ una transformación lineal entre dos K-espacios vectoriales. Sean S y S' subespacios de V y V' respectivamente. Probar que $T(S)$, $T^{-1}(S')$ y $N(T)$ son subespacios vectoriales.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$. Determinar el núcleo y la imagen de T, y sus dimensiones. Caracterizar el conjunto $T^{-1}(C)$, siendo $C = \{(x, y) : x = 1\}$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la multiplicación por $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$

   Indicar qué vectores están en el núcleo de T y cuáles en la imagen de T:
   $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Sea $T : P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = xp(x)$

   a) Indicar cuáles polinomios de los siguientes están en el núcleo de T:

   x^2, 0, $1 + x$

   b) Cuáles en la imagen de T: $x + x^2$, $1 + x$, $3 - x^2$

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo K y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que T es inyectiva sí y sólo sí $T^{-1}(0) = \{0\}$.

6. Hallar el rango y nulidad de la transformación lineal del ejercicio 2..

7. En cada caso utilizar la información que se da para hallar la nulidad de T.

   a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ tiene rango 3.

   b) La imagen de $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}^3$.

   c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tiene rango 3.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la multiplicación por $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Demostrar que el núcleo de T es una recta por el origen y encontrar sus ecuaciones paramétricas.

   b) Demostrar que la imagen de T es un plano por el origen y encontrar su ecuación.

9. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $X = \{v_1, \cdots, v_m)$ un conjunto finito de vectores de V. Considerar la aplicación lineal $E : K^m \to V$ definida por

   $E(k_1, \cdots, k_m) = k_1.v_1 + k_2.v_2 + \cdots + k_m.v_m$

   a) Probar que E es lineal

   b) Probar que E es inyectiva sí y sólo sí X es linealmente independiente

   c) Probar que E es suryectiva sí y sólo sí X es un conjunto de generadores de V.

10. Sea $D : P_3 \to P_2$ la transformación derivación. Describir el núcleo de D, $N(D)$.

11. Sea $I : P_1 \to \mathbb{R}$ la transformación integración de p, $\int_{-1}^{1} p(x)dx$. Describir $N(I)$.

Matriz de una transformación lineal

12. Sea $T : P_2 \to P_1$ la transformación lineal definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$. Hallar la matriz de T con resp. a las bases stándard de P_2 y P_1.

13. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

    a) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde

    $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    b) Verificar utilizando la matriz anterior que $T\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fecha de muestra del ejercicio 1 el día 17 de Septiembre de 2014