Algebra Lineal. Curso Segundo Cuatrimestre 2018

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRONOMICAS Y GEOFISICAS. UNLP

Práctica 1

Trabajo de investigación

Para pasar de coordenadas celestes a coordenadas horizontales, es necesario hacer dos rotaciones, a saber:

$\overrightarrow{r_{el}}= R_z(\text{TSL})*\overrightarrow{r_{ec}}$
$\overrightarrow{r_{h}}= R_y(90\text{-}\varphi)*\overrightarrow{r_{el}}$

Donde usaremos TSL= tiempo siderio local= 18:31:31 y $\varphi= -34^o$ 50' La PLata.

El vector de las coordenadas ecuatoriales celestes se escribe como:

$$\overrightarrow{r_{ec}} = \begin{pmatrix} cos(\delta)cos(\alpha) \\ cos(\delta)sen(\alpha) \\ sen(\delta) \end{pmatrix}$$

El vector de las coordenadas horizontales se escribe como:

$$\overrightarrow{r_{h}} = \begin{pmatrix} cos(h)cos(A) \\ -cos(h)sen(A) \\ sen(h) \end{pmatrix}$$

donde h=$sen^{-1}(z)$ y A=$tan^{-1}(x/y)$

Amplie la tabla 1 con las coordenadas horizontales para cada cúmulo.

Nota: No tenga en cuenta la precesión.

Recomendación: Haga un programa para hacer los cálculos.

Fecha de entrega: Viernes 28 de septiembre

Una transformación (o función o mapeo) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ asigna a cada vector $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^n$ (dominio) un vector $T(\vec{x})$ en $\mathbb{R}^m$ (codominio). A su vez el mapeo dado por T del dominio al codominio se asocia a una multiplicación matricial $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde A es la matriz de la transformación. Esta matriz genera dos espacios de particular interés para el álgebra, el subespacio anulador o núcleo de T y el subespacio de la columnas de A o imagen de T. Un resultado muy importante es que la suma de las dimensiones de estos subespacios siempre será igual a la dimensión del dominio de T.

Table 1: En ésta tabla están las coordenadas celestes de 13 cúmulos abiertos.

Cúmulo	RA(J2000)	Dec(J2000)
NGC6192	16:40:16.40	−43:30:31.0
NGC6242	16:55:32.38	−39:28:02.0
NGC6322	17:18:25.13	−42:56:03.3
NGC6704	18:50:42.00	−05:12:42.5
NGC6737	19:02:16.30	−18:32:56.5
Rup102	12:13:32.95	−62:43:18.7
Rup166	13:25:38.14	−63:27:54.6
SLS4565	18:01:59.55	−23:41:06.3
Lynga14	16:55:03.40	−45:14:09.1
Trumpler22	14:31:03.33	−61:09:57.0
Trumpler24	16:56:11.14	−40:40:01.1
Dominici11	18:57:36.31	−10:23:39.9
Dominici12	18:51:24.93	−13:18:50.2

Ejercicios prácticos

Transformaciones Lineales.

1. Utilice la definición de transformación lineal para justificar por qué $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(\epsilon) = \frac{1}{3} E\epsilon^2$ no la cumple. Grafique.

2. Sea A la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Encuentre una $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea $\vec{b}$ y responda si existe más de una $\vec{x}$ cuya imagen bajo T sea $\vec{b}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3. La transformación de trasquillado deforma un cuadrado como si este se empujara hacia la derecha manteniendo fija la base. Gráfique el producto de multiplicar por A los vértices del cuadrado: (0,0), (0,2), (2,0) y (2,2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Encuentre la expresión de la transformación proyección $T(\vec{x})$ donde $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ y describa el mapeo. Siendo su matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Dado un escalar r, si $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que $T(\vec{x}) = r\vec{x}$, identifique que valores debe tomar r para que T sea una contracción y cuáles para que T sea una dilatación.

6. Dadas:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Indique cuál de ellas es una contracción o expansión vertical y cuál una horizontal, cuál una proyección sobre el eje x_1 y cuál sobre el eje x_2, cuál es un trasquillado vertical y cuál horizontal, cuál es una reflexión con respecto al origen, cual a través de el eje x_1 y cuál a través del eje x_2, por último cuál representa una reflexión a través de la recta x_1=x_2 y cuál a través de la recta x_1=$-x_2$.

7. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x+2y, -x, 0)$

   a) Encontrar la matriz de la transformación lineal T respecto a las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde
   $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) Verificar utilizando la matriz anterior que $T\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. Una rotación de Givens es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que se utiliza para crear una entrada cero en un vector. Sería como generar la rotación en vez de cambiar el sistema de referencia. Para n=2 la rotación de Givens tiene la forma general:

   $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a^2 + b^2 = 1$

   Encuentre a y b tales que $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gire a $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal.

9. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y,z) = (x+y, x+z)$. Determinar el núcleo y la imagen de T, y sus dimensiones. Caracterizar el conjunto $T^{-1}(C)$, siendo $C = \{(x,y) : x = 1\}$

10. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la multiplicación por $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$

    Indicar qué vectores están en el núcleo de T y cuáles en la imagen de T:

    $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. Sea $T : P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x] \to P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x]$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = xp(x)$

    a) Indicar cuáles polinomios de los siguientes están en el núcleo de T:

    x^2, 0, $1 + x$

    b) Cuáles en la imagen de T: $x + x^2$, $1 + x$, $3 - x^2$

12. Sea $T : P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x] \to P_{\mathbb{R}}^{(1)}[x]$ la transformación lineal definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$. Hallar la matriz de T con resp. a las bases stándard de $P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$ y $P_{\mathbb{R}}^{(1)}[x]$.

13. En cada caso utilizar la información que se da para hallar la nulidad de T.

    a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ tiene rango 3.

    b) La imagen de $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}^3$.

    c) $T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ tiene rango 3.

14. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la multiplicación por $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

    a) Demostrar que el núcleo de T es una recta por el origen y encontrar sus ecuaciones paramétricas.

    b) Demostrar que la imagen de T es un plano por el origen y encontrar su ecuación.

15. Sea $D : P_3 \to P_2$ la transformación derivación. Describir el núcleo de D, $N(D)$.

16. Sea $I : P_1 \to \mathbb{R}$ la transformación integración de p, $\int_{-1}^{1} p(x)dx$. Describir $N(I)$.

Ejercicios teóricos

17. Dado un cuerpo K, sea $T : V \to V'$ una transformación lineal entre dos K-espacios vectoriales. Sean S y S' subespacios de V y V' respectivamente. Probar que $T(S)$, $T^{-1}(S')$ y $N(T)$ son subespacios vectoriales.

18. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo K y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que T es inyectiva sí y sólo sí $T^{-1}(0) = \{0\}$.

19. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $X = \{v_1, \cdots, v_m$ un conjunto finito de vectores de V. Considerar la aplicación lineal $E : K^m \to V$ definida por

    $E(k_1, \cdots, k_m) = k_1.v_1 + k_2.v_2 + \cdots + k_m.v_m$

    a) Probar que E es lineal

    b) Probar que E es inyectiva sí y sólo sí X es linealmente independiente

    c) Probar que E es suryectiva sí y sólo sí X es un conjunto de generadores de V.

20. Dado V un K-espacio vectorial de dimensión n (K cuerpo), sea $\varphi \in V^*$. Probar que $Im(\varphi) = K$ y que $dimN(\varphi) = n - 1$.

21. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Dados φ y ϕ funcionales lineales sobre V, suponer que la función ψ definida por $\psi(v) = \varphi(v).\phi(v)$ también es un funcional lineal sobre V. Demostrar que $\varphi = 0$ o $\phi = 0$.

22. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita (K cuerpo). Demostrar:

    a) Si A y B son subconjuntos de V tales que $A \subseteq B$, entonces $B^0 \subseteq A^0$.

    b) Dados S y T subespacios de V,

    $(S + T)^0 = S^0 \cap T^0$ y $(S \cap T)^0 = S^0 + T^0$

23. Sean V y W dos K-espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. La *traspuesta* de T es la función $T^t : W^* \to V^*$ que aplica a un funcional $\varphi \in W^*$ en el funcional $T^t(\varphi) \in V^*$ definido por

    $$(T^t(\varphi))(v) = \varphi(T(v)), \text{ para todo } v \in V$$

    a) Probar que T^t está bien definida y que es una aplicación lineal.

    b) Probar que $Nu(T^t) = (Im(T))^0$

Notación Tensorial.

24. Utilice el concepto de espacio dual para escribir de forma tensorial:

    i) La transformación de una base dual a otra.

    ii) La relación entre las matrices de transformación para vectores covariantes y contravariantes.

25. Explique de que modo se obtiene la base dual de un espacio vectorial dado, utilice un ejemplo. Luego de un ejemplo a la inversa, esto es, teniendo la base dual, como encontraría la base del espacio vectorial.

26. Responda:

    i)¿Qué relación hay entre las dimensiones del espacio dual con su espacio vectorial V?

    ii) ¿A qué se llama espacio anulador?

iii) ¿Los elementos del espacio anulador pertenecen al dual?

iv) ¿A qué se llama aplicación transpuesta? De un ejemplo.

v) ¿A qué se denomina doble dual?¿Para qué sirve?

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. El rango de T es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.
2. La generalización $T(c_1\vec{v}_1 + .. + c_p\vec{v}_p) = c_1T(\vec{v}_1) + .. + c_pT(\vec{v}_p)$ es lo que se conoce como pricipio de superposición en física.
3. El conocimiento de $T(\vec{e}_1)$ y $T(\vec{e}_2)$ siendo $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ los vectores canónicos, no basta para encontrar T sabiendo que T es lineal.
4. A=$[T(\vec{e}_1)..T(\vec{e}_n)]$ se llama matriz estándar de T.
5. T es suryectiva si y sólo si las filas de A generan el codominio.
6. T es inyectiva si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes y la ecuación $T(\vec{x}) = \vec{0}$ tiene únicamente la solución trivial.
7. Para que una transformación sea isomorfa el dominio y el codominio deben coincidir.
8. A es invertible si la dimensión del núcleo de A es cero.
9. Si los vectores en el dominio generan un área y después de ser mapeados siguen generando una área, cuanto aumente o disminuya el área cambio dependerá del determinante de la matriz A de la transformación lineal.
10. Una transformación lineal siempre mapea el vector nulo del dominio en el vector nulo del codominio.
11. Existe un isomorfismo $T : P_{\mathbb{R}}^{(3)}[x] \to \mathbb{R}^4$.

Nota:
Respuestas del Verdadero o Falso práctica 0.5: V,F,F,V,V,F,F.