Algebra Lineal. Curso Segundo Cuatrimestre 2016.

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRONOMICAS Y GEOFISICAS. UNLP.

Práctica 1

Coordenadas de un vector en una base

1. Para pasar de coordenadas celestes a coordenadas horizontales, es necesario hacer dos rotaciones, a saber:

   $\overrightarrow{r_{el}}= R_z(\text{TSL})*\overrightarrow{r_{ec}}$
   $\overrightarrow{r_h}= R_y(90\text{-}\varphi)*\overrightarrow{r_{el}}$

   Donde usaremos TSL= tiempo siderio local= 18:31:31 y φ= 34º 50' La PLata.

   El vector de las coordenadas ecuatoriales celestes se escribe como:

   $$\overrightarrow{r_{ec}} = \begin{pmatrix} cos(\delta)cos(\alpha) \\ cos(\delta)sen(\alpha) \\ sen(\delta) \end{pmatrix}$$

   El vector de las coordenadas horizontales se escribe como:

   $$\overrightarrow{r_h} = \begin{pmatrix} cos(h)cos(A) \\ -cos(h)sen(A) \\ sen(h) \end{pmatrix}$$

   h=$sen^{-1}(z)$ y A=$tan^{-1}(x/y)$

   Amplié la tabla 1 con las coordenadas horizontales para cada cúmulo.

   Nota: No tenga en cuenta la precesión.

   Recomendación: Haga un programa para hacer los cálculos.

2. Encontrar las coordenadas del vector w relativas a la base $B = \{u_1, u_2\}$.

   a) $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$; $w = (3, 7)$

   b) $u_1 = (2, -4)$, $u_2 = (3, 8)$; $w = (1, 1)$

   c) $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (0, 2)$; $w = (a, b)$

Table 1: En ésta tabla están las coordenadas celestes de 13 cúmulos abiertos.

Cúmulo	RA(J2000)	Dec(J2000)
NGC6192	16:40:16.40	−43:30:31.0
NGC6242	16:55:32.38	−39:28:02.0
NGC6322	17:18:25.13	−42:56:03.3
NGC6704	18:50:42.00	−05:12:42.5
NGC6737	19:02:16.30	−18:32:56.5
Rup102	12:13:32.95	−62:43:18.7
Rup166	13:25:38.14	−63:27:54.6
SLS4565	18:01:59.55	−23:41:06.3
Lynga14	16:55:03.40	−45:14:09.1
Trumpler22	14:31:03.33	−61:09:57.0
Trumpler24	16:56:11.14	−40:40:01.1
Dominici11	18:57:36.31	−10:23:39.9
Dominici12	18:51:24.93	−13:18:50.2

3. Encontrar las coordenadas del vector v relativas a la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

   a) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 2, 0)$, $v_3 = (3, 3, 3)$; $v = (2, -1, 3)$

4. Encontrar las coordenadas del vector $p \in P_2$ relativas a la base $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

   a) $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 + x^2$, $p_3 = x + x^2$; $p = 4 - 3x + x^2$

5. En $M_2(\mathbb{R})$, encontrar las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ relativas a la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cambio de base

6. Considerar las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2\}$ para $\mathbb{R}^2$, donde $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (-3, 4)$.

   a) Hallar la matriz de transición de B a B', $P_{B',B}$.

   b) Utilizar la matriz anterior para obtener las coordenadas en la base B' de $w = (3, -5)_B$.

   c) Verificar lo obtenido en b) haciendolo directamente.

   d) Hallar la matriz de transición $P_{B,B'}$ y verificar que $P_{B,B'} = P^{-1}_{B',B}$.

7. Considerar las bases $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ para $\mathbb{R}^3$, donde $u_1 = (-3, 0, -3)$, $u_2 = (-3, 2, 1)$,$u_3 = (1, 6, -1)$ $v_1 = (-6, -6, 0)$, $v_2 = (-2, -6, 4)$ y $v_2 = (-2, -3, 7)$.

a) Hallar la matriz de transición de B a B'.

b) Utilizar la matriz anterior para obtener las coordenadas en la base B' de $w = (-5, 8, -5)_B$.

8. Considerar las bases $B = \{p_1, p_2\}$ y $B' = \{q_1, q_2\}$ para P_1, donde $p_1 = 6 + 3x$, $p_2 = 10 + 2x$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3 + 2x$.

   a) Hallar la matriz de transición de B a B'.

   b) Utilizar la matriz anterior para obtener las coordenadas de $p = -4 + x$ en la base B'.

9. Se quiere obtener un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'$ haciendo girar un sistema de coordenadas rectangulares xy hasta describir un ángulo de $\theta = \frac{3}{4}\pi$

   a) Hallar las coordenadas $x'y'$ del punto cuyas coordenadas xy son $(-2, 6)$

   b) Hallar las coordenadas xy del punto cuyas coordenadas $x'y'$ son $(5, 2)$

10. Se quiere obtener un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'z'$ haciendo girar un sistema de coordenadas rectangulares xyz en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje z, cuando se observa hacia abajo a lo largo del eje z hasta describir un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{4}$

    a) Hallar las coordenadas $x'y'z'$ del punto cuyas coordenadas xyz son $(-1, 2, 5)$

    b) Hallar las coordenadas xyz del punto cuyas coordenadas $x'y'z'$ son $(1, 6, -3)$

11. Decir para cuál de las siguientes matrices $X = PX'$ es una rotación

    a) $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 & 3/7 \\ 2/7 & 3/7 & -6/7 \\ -3/7 & 6/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

12. Se quiere obtener un sistema de coordenadas rectangulares $x''y''z''$ haciendo girar primero un sistema de coordenadas xyz $60°$ en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje z (al mirar hacia abajo del eje z positivo) para obtener un sistema de coordenadas $x'y'z'$ y luego haciendo girar éste $45°$ en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje y' (si se mira a lo largo del eje y' positivo, hacia el origen). Hallar una matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales. Ejemplos

13. Determinar si las siguientes son transformaciones lineales. Justificar.

    a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x, y + 1)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y, z) = (0, 0)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$

d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$d_1) T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ab - cd$

$d_2) T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$

e) Considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(u+iv) = u - iv$

f) Dado un cuerpo K, la *traza*, $tr : M_n(K) \to K$, definida por $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

g) Dado un cuerpo K, la proyección a la i-ésima coordenada, $\pi_i : K^n \to K$, definida por $\pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$

h) Sea K un cuerpo y A una matriz fija de $M_{m,n}(K)$ (K-espacio vect. de las matrices de $m \times n$ con coeficientes en K).

$T : K^n \to K^m$ definida por $T(x_1, \cdots, x_n) = A(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

i) Para $M \in M_n(K), M \neq 0$, $T : M_n(K) \to M_n(K)$

$i_1)$ $T(A) = MA$

$i_2)$ $T(A) = MA - AM$

$i_3)$ $T(A) = A + M$

14. Dado $m \in \mathbb{N}$, y $P_m(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual a m. Probar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales

    a) $D : P_m(\mathbb{R}) \to P_{m-1}(\mathbb{R})$ dada por

    $D(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1})$

    b) $I : P_m(\mathbb{R}) \to P_{m+1}(\mathbb{R})$ dada por

    $I(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_m}{m+1}x^{m+1})$

Fecha de entrega del 1º ejercicio 14 de Septiembre de 2016