

## Práctica 0

### ¿Sobre qué trata el Álgebra lineal?

El álgebra se dirige por distintos caminos hacia lo que se considera hoy su problema esencial: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

Así como un cartógrafo describiría una ciudad por sus calles, autopistas y plazas, el álgebra lineal se concentra en entender como se comportan las estructuras de una entidad matemática llamadas tensores, los cuales incluyen a las matrices, los vectores y los escalares. También, en una ciudad existen relaciones entre barrios, casas y ciudadanos, en el álgebra lineal podemos desentrañar las relaciones que se dan entre las diferentes estructuras. Es una parte de la matemática en la que podemos aventurarnos a tener un pensamiento muy abstracto en donde pedazos inconexos que ya traemos pueden ahora encontrar su por qué y su lugar en el gran rompecabezas del álgebra.

En éste curso semestral le proponemos no sólo que incorpore los nuevos conceptos sino que también ejercite su capacidad de investigación y la de transmitir sus hallazgos, lo cual es igual de importante.

Las prácticas contarán con ejercicios prácticos y ejercicios teóricos y alentaremos a que pase a exponerlos en el pizarrón, lo cual mejorará su oratoria. Además cuenta con un trabajo de investigación el cual debe presentar y aprobar. Por último, las prácticas cuentan con una parte de autoevaluación que le servirá para saber qué temas debe reforzar.

### Trabajo de investigación

Realice una pequeña investigación de las definiciones de:

- a) Un escalar.
- b) Un vector.
- c) Una matriz.
- d) Un tensor.

Teniendo en cuenta los siguientes items:

- a) Incluya al menos un gráfico por cada tipo y describa ese gráfico.
- b) Resuma que tipo de operaciones se pueden hacer con cada uno.
- c) Construya una opinión práctica personal de qué son estas entidades matemáticas.
- d) Cite fuentes o bibliografías.

**Fecha de entrega: Viernes 2 de noviembre**

## Ejercicios prácticos

### Producto escalar. Norma. Distancia y ángulo entre vectores

1. Calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , siendo  $(\cdot)$  el producto escalar, para  $\vec{u} = (2, -5, -1)$  y  $\vec{v} = (3, 2, -3)$ .
2. Sea  $\vec{v} = (1, -2, 2, 0)$ . Encuentre un vector unitario  $\vec{u}$  en la misma dirección que  $\vec{v}$ .
3. Demuestre que  $\vec{c}$  es ortogonal a  $\vec{d}$  siendo  $\vec{c} = (4/3, -1, 2/3)$  y  $\vec{d} = (5, 6, -1)$ .
4. Determine el coseno del ángulo entre los vectores  $\vec{u} = (2, -5, -1)$  y  $\vec{v} = (3, 2, -3)$ , en estadística este valor recibe el nombre de cociente de correlación. Si el valor está cercano a 1 o a -1 los datos están relacionados, de lo contrario si el valor es cercano a 0 no existe ninguna relación entre ellos.
5. Encuentre la distancia entre  $\vec{x} = (1, -1, 2)$  y  $\vec{y} = (3, 4, -5)$ .

### Sistemas de ecuaciones lineales

6. Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

- a) Compruebe que la terna  $(2t + 3, -3t - 2, t)$  es solución de dicho sistema.
  - b) Justifique por qué éste sistema tiene infinitas soluciones.
  - c) ¿Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales?
7. Dados los sistemas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

- a) Compruebe que tienen el mismo conjunto solución.
- b) Comente la relación entre los dos sistemas.
- c) ¿Cuáles son las llamadas operaciones elementales?

8. Encuentre los valores de  $b$  que hacen que el sistema

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + (b-2)x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + (b-4)x_3 = 3 \end{cases}$$

Tenga: i) Una solución.

ii) Infinitas soluciones.

iii) Ninguna solución.

iv) Describe el conjunto solución para i) y ii)

Nota: utilice el algoritmo de eliminación Gauss y preste atención a la notación.

### Matrices. Matrices Semejantes. Matrices elementales.

Arthur Cayley mismo relató en 1894 qué fue lo que le condujo a las matrices: Fue directamente como un modo conveniente de expresar las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dx \end{cases}$$

Simbolizando esta transformación lineal con dos variables independientes por medio de la disposición en cuadro.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

9. Halle las matrices  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  sabiendo que:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

10. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz de tamaño  $m \times n$  y  $\mathbf{B}$  es una matriz de tamaño  $n \times p$ , el producto de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es la matriz de tamaño  $m \times p$ , cuyo elemento  $(i,k)$  es el producto escalar de la fila  $i$  de la matriz  $\mathbf{A}$  por la columna  $k$  de  $\mathbf{B}$ , o sea:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Dadas las matrices:  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Analice en qué casos es posible calcular:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ -  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ , ésta diferencia se la conoce como conmutador.

11. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ver que se simplifica el producto  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  si se utilizan submatrices.

12. Calcule  $\mathbf{A}^6$  siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Dados los tres pares de datos (0,-1), (1,1) y (2,0), hallar el polinomio de grado menor o igual que dos:  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  que pasa de dichos pares de datos. Evaluar el valor de  $p(x)$  si  $x=2/3$ . Al polinomio resultante se lo denomina: polinomio de interpolación.

### Determinantes y matrices inversibles. Rango de una matriz.

14. ¿ Es invertible la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

?

Justifique de varias maneras su conclusión.

15. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores del parámetro  $b$  para que  $A$  sea invertible.

16. Piense una forma conveniente para calcular el valor del determinante de una matriz cuadrada y usarlo para calcular el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

17. Encuentre el rango de la matriz en función del parámetro a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicios teóricos

18. Demuestre que si

i)  $D = [d_{ij}]$  una matriz diagonal de tamaño  $n \times n$ . Entonces  $\det D = \prod_i^n d_{ii}$ .

ii) Si  $A$  es una matriz triangular del tamaño  $n \times n$ , entonces  $\det A$  es producto de los elementos diagonales de  $A$ .

iii) Una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$  el  $\det (tA) = t^n \det A$  siendo  $t$  un escalar cualquiera.

19. Demuestre el siguiente enunciado:

Supongamos que  $\mathbf{u}_0$  es una solución particular del sistema de ecuaciones lineales  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Si  $\mathbf{v}$  es una solución cualquiera del sistema homogéneo asociado  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  entonces  $\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$  es solución de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Aplice lo demostrado para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + z + w = 4 \\ 2x + y - w = -2 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$$

### Notación Tensorial.

20. Utilice el convenio de la suma de Einstein para escribir de forma tensorial:

i) Un vector.

ii) El producto escalar.

iii) Un sistema de ecuaciones.

21. Responda:

i) ¿Qué información me dan los subíndices libres?

ii) ¿Cómo se identifican los subíndices mudos?

iii) ¿Por qué se llama frecuentemente a la delta de Kronecker operador de sustitución?

iv) ¿Qué valor toma la terna 132 para el símbolo de permutación?

22. Desarrollar las expresiones siguientes para  $n = 3$

a)  $\delta_j^i a^j$ ,    b)  $\delta_{ij} x^i x^j$ ,    c)  $\delta_i^i$ ,    d)  $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$

23. Verificar en  $R^3$  las siguientes igualdades

a)  $\delta^{ij} e_{ijk} = 0$

b)  $e^{ikm} e_{jkm} = 2 \delta_j^i$

c)  $e^{ijk} e_{ijk} = 3!$

d)  $e^{ijm} e_{klm} = \delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j$

## Autoevaluación

### Verdadero o Falso.

1. Si la distancia entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es igual a la distancia de  $\vec{u}$  y  $-\vec{v}$ , entonces  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales.
2. Sean las matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se verifica que  $\mathbf{AB}^t = \mathbf{A}^t \mathbf{B}$ .
3. Consideremos la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

La ecuación  $\det \mathbf{A} = 0$ , no tiene solución.

4. Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ , se verifica la relación  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ .
5. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  una matriz invertible se verifica que  $\det \mathbf{A}^{-1} = -\det \mathbf{A} = 1$ .
6. Sea  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, si se verifica  $\text{rango } \mathbf{A} = n$ , entonces el sistema es compatible determinado.
7. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  de forma tal que  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , se verifica que  $\det \mathbf{A} = 0$  o  $\det \mathbf{A} = 1$ .

En la próxima práctica tendrá los resultados del verdadero o falso y podrá autoevaluarse.

Nota: