Práctica 0

¿Sobre qué trata el Álgebra lineal?

El álgebra se dirige por distintos caminos hacia lo que se considera hoy su problema esencial: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

Así como un cartógrafo describiría una ciudad por sus calles, autopistas y plazas, el álgebra lineal se concentra en entender como se comportan las estructuras de una entidad matemática llamadas tensores, los cuales incluyen a las matrices, los vectores y los escalares. También, en una ciudad existen relaciones entre barrios, casas y ciudadanos, en el álgebra lineal podemos desentrañar las relaciones que se dan entre las diferentes estructuras. Es una parte de la matemática en la que podemos aventurarnos a tener un pensamiento muy abstracto en donde pedazos inconexsos que ya traemos pueden ahora encontrar su por qué y su lugar en el gran rompecabezas del álgebra.

En este curso semestral les proponemos no sólo que incorpore los nuevos conceptos sino que también ejercite su capacidad de investigación y la de trasmitir sus hallazgos, lo cual es igual de importante.

Las prácticas contarán con ejercicios prácticos y ejercicios teóricos y alentaremos a que pase a exponerlos en el pizarrón, lo cual mejorará su oratoria. Además cuenta con un trabajo de investigación el cual debe presentar y aprobar. Por último, las prácticas cuentan con una parte de autoevalución que le servirá para saber qué temas debe reforzar.

Trabajo de investigación

Realice una pequeña investigación de las definiciones de:

a) Un escalar.
b) Un vector.
c) Una matriz.
d) Un tensor.

Teniendo en cuenta los siguientes items:
a) Incluya al menos un gráfico por cada tipo y describa ese gráfico.
b) Resuma que tipo de operaciones se pueden hacer con cada uno.
c) Construya una opinión práctica personal de qué son estas entidades matemáticas.
d) Cite fuentes o bibliografias.

Fecha de entrega: Viernes 2 de noviembre

Ejercicios prácticos

Producto escalar. Norma. Distancia y ángulo entre vectores

1. Calcule $\vec{u}.\vec{v}$, siendo (.) el producto escalar, para $\vec{u}$= (2,-5,-1) y $\vec{v}$ = (3, 2, -3).
2. Sea $\vec{v}$= (1,-2,2,0). Encuentre un vector unitario $\vec{u}$ en la misma dirección que $\vec{v}$.
3. Demuestre que $\vec{c}$ es ortogonal a $\vec{d}$ siendo $\vec{c}$ = (4/3,-1, 2/3) y $\vec{d}$ = (5, 6,-1).
4. Determine el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{u}$= (2,-5,-1) y $\vec{v}$= (3, 2,-3), en estadística este valor recibe el nombre de coeficiente de correlación. Si el valor esta cercano a 1 o a -1 los datos están relacionados, de lo contrario si el valor es cercano a 0 no existe ninguna relación entre ellos.
5. Encuentre la distancia entre $\vec{x}$ = (1, -1, 2) y $\vec{y}$ = (3,4,-5).

   Sistemas de ecuaciones lineales

6. Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

   a) Compruebe que la terna $(2t+3, -3t-2, t)$ es solución de dicho sistema, $\forall$ t $\in \mathbb{R}$.

   b) Justifique por qué éste sistema tiene infinitas soluciones.

   c) ¿Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales?

7. Dados los sistemas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

   y

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

   a) Compruebe que tienen el mismo conjunto solución.

   b) Comente la relación entre los dos sistemas.

   c) ¿Cuáles son las llamadas operaciones elementales?

8. Encuentre los valores de b que hacen que el sistema

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + (b-2)x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + (b-4)x_3 = 3 \end{cases}$$

Tenga: i) Una solución.

ii) Infinitas soluciones.

iii) Ninguna solución.

iv) Describe el conjunto solución para i) y ii)

Nota: utilice el algoritmo de eliminación Gauss y preste atención a la notación.

Matrices. Matrices Semejantes. Matrices elementales.

Arthur Cayley mismo relató en 1894 qué fué lo que le condujo a las matrices: Fué directamente como un modo conveniente de expresar las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dx \end{cases}$$

Simbolizando esta transformación lineal con dos variables independientes por medio de la disposición en cuadro.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

9. Halle las matrices **X** e **Y** sabiendo que:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

10. Si **A** es una matriz de tamaño $m \times n$ y **B** es una matriz de tamaño $n \times p$, el producto de las matrices **A** y **B** es la matriz de tamaño $m \times p$, cuyo elemento (i,k) es el producto escalar de la fila i de la matriz A por la columna k de B, o sea:

$(\mathbf{A}.\mathbf{B})_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

Dadas las matrices: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Analice en qué casos es posible calcular: **A**.**B**- **B**.**A**, ésta diferencia se la conoce como conmutador.

11. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ver que se simplifica el producto $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ si se utilizan submatrices.

12. Calcule $\mathbf{A}^6$ siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Dados los tres pares de datos (0,-1), (1,1) y (2,0), hallar el polinomio de grado menor o igual que dos: p(x)= $a_0 + a_1x + a_2x^2$ que pasa por dichos pares de datos. Evaluar el valor de p(x) si x=2/3. Al polinomio resultante se lo denomina: polinomio de interpolación.

Determinantes y matrices inversibles. Rango de una matriz.

14. ¿ Es invertible la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

?

Justifique de varias maneras su conclusión.

15. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores del parámetro b para que A sea invertible.

16. Piense una forma conveniente para calcular el valor del determinante de una matriz cuadrada y usarlo para calcular el determinate de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

17. Encuentre el rango de la matriz en función del parámetro a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios teóricos

18. Demuestre que si

    i) D = $[d_{ij}]$ una matriz diagonal de tamaño n × n. Entonces det D = $\prod_i^n d_{ii}$.

    ii) Si A es una matriz triangular del tamaño n × n, entonces det A es producto de los elementos diagonales de A.

    iii) Una matriz A de tamaño n × n el det (tA)= $t^n detA$ siendo t un escalar cualquiera.

19. Demuestre el siguiente enunciado:

    Supongamos que $\mathbf{u_0}$ es una solución particular del sistema de ecuaciones lineales A**x**= **b**. Si **v** es una solución cualquiera del sistema homogéneo asociado A**x**= **0** entonces $\mathbf{u_0} + \mathbf{v}$ es solución de A**x**= **b**.

    Aplique lo demostrado para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + z + w = 4 \\ 2x + y - w = -2 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$$

Notación Tensorial.

20. Utilice el convenio de la suma de Einstein para escribir de forma tensorial:

    i) Un vector.

    ii) El producto escalar.

    iii) Un sistema de ecuaciones.

21. Responda:

    i) ¿Qué información me dan los subíndices libres?

    ii) ¿Cómo se identifican los subíndices mudos?

    iii) ¿Por qué se llama frecuentemente a la delta de Kronecker operador de sustitución?

    iv) ¿Qué valor toma la terna 132 para el símbolo de permutación?

22. Desarrollar las expresiones siguientes para $n = 3$

    $a)\delta^i_j\ a^j, \quad b)\delta_{ij}\ x^i\ x^j, \quad c)\delta^i_i, \quad d)\frac{\partial f_i}{\partial x^j}dx^j$

23. Verificar en R^3 las siguientes igualdades

    a) $\delta^{ij}\ e_{ijk} = 0$

    b) $e^{ikm}\ e_{jkm} = 2\ \delta^i_j$

    c) $e^{ijk}\ e_{ijk} = 3!$

    d) $e^{ijm}\ e_{klm} = \delta^i_k\delta^j_l\ -\ \delta^i_l\delta^j_k$

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. Si la distancia entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a la distancia de $\vec{u}$ y $-\vec{v}$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

2. Sean las matrices $\mathbf{A}$,$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{nxn}$ se verifica que $\mathbf{AB}^t = \mathbf{A}^t\mathbf{B}$.

3. Consideremos la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

    La ecuación det$\mathbf{A}$ = 0, no tiene solución.

4. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$, se verifica la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

5. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ una matriz invertible se verifica que det$\mathbf{A}^{-1}$ = - det$\mathbf{A}$ = 1.

6. Sea A$\mathbf{x}$= $\mathbf{b}$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, si se verifica rango A=n, entonces el sistema es compatible determinado.

7. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ de forma tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, se verifica que det$\mathbf{A}$ = 0 o det$\mathbf{A}$ = 1.

En la próxima práctica tendrá los resultados del verdadero o falso y podrá autoevaluarse.

Nota: