Álgebra Lineal. Curso Segundo Cuatrimestre 2017.

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRONOMICAS Y GEOFISICAS. UNLP.

Práctica 0.5

Trabajo de investigación

Busque información sobre los aportes científicos que han hecho los siguientes matemáticas/os:

a) Adrián Paenza.
b) Isaac Newton.
c) Emmy Noether.
d) Srinivasa Ramanujan.
e) Hermann Günther Grassmann.

Ejemplo:
Hamilton fue un sabio múltiple que sobresalió en astronomía, física y matemática. Se ocupó de los vectores (el nombre es invención suya) y creó un sistema de números complejos que llamó Quaternions (cuaternios) que satisface todas las propiedades conocidas de las operaciones de la aritmética ordinaria, con excepción de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Sin embargo, los Quaternios no resultaron muy aplicables, hasta el momento. Los mismos fueron predecesores de las matrices.

Luego, elija alguna/o y entregue la información que encontró en formato .pdf, una vez que haya compilado su trabajo en latex. No olvide mencionar la bibliografía utilizada.

Anexe completo el siguiente cuestionario:
1- A su entender, quién cree que ha hecho más aportes al álgebra lineal y por qué.
2- ¿Quién transmitía mejor sus ideas?
3- ¿Cualés cualidades le parecen dignas de imitar?

Fecha de entrega: Viernes 15 de septiembre

Ejercicios prácticos

Espacios Vectoriales. Subespacios. Suma de subespacios.

1. Analizar si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$
   a) El conjunto de puntos $V = \{(x, y) : y = 2x + 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   b) El semiplano y$\geq$ 0, en $\mathbb{R}^2$.

c) Los polinomios de grado menor o igual que 2, $P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$.

2. Dar al menos 5 ejemplos de espacios vectoriales y escribir según su opinión, qué utilidad podría tener saber si algo se comporta como un espacio vectorial.

3. Sabiendo que sí S es un subespacio de un espacio vectorial V sí, y sólo sí, se cumplen las siguientes condiciones:

   i) S contiene al vector $\vec{0}$ de V.

   ii) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están en S, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ está en S.

   iii) Si $\vec{u}$ está en S y α es un escalar entonces, $\alpha\vec{u}$ está en S.

   Comprobar si valen las siguientes afirmaciones:

   a) $S = \{(x, y, z) : z = 0\}$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   b) El conjunto de polinomios $P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$, de grado menor o igual que 2, es subespacio vectorial del espacio vectorial $P_{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$ de todos los polinomios con coeficientes reales.

4. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{S}$=$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y $\mathbf{T}$=$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ calcular:
   a) Una base y la dimensión de ambos subespacios.
   b) $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ y $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$, dando las bases de dichos subespacios.
   c) ¿La suma $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ es directa?

5. Halle en cada uno de los ejemplos siguientes la suma y la intersección del par de subespacios dados, y comprobar que se verifica la ecuación:

   $$dim(V_1) + dim(V_2) = dim(V_1 + V_2) + dim(V_1 \cap V_2)$$

   a) Siendo el conmutador la diferencia entre A.B -B.A con A y B matrices, elegimos que el conmutador sea necesariamente 0 para encontrar los subespacios que se forman si A es la matriz que se muestra en cada caso:
   $\mathbf{V_1} = conm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{V_2} = conm \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
   b) Los subespacios formados por las bases $\{sen(x), cos(x)\}$ y $\{e^{it}, e^{-it}\}$ considerados en el espacio real $C_{\mathbb{C}}([0, 1])$.

6. Demostrar que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden homogénea, con coeficientes constantes: $y' + ky = 0$ es un espacio vectorial de dimensión uno, siendo $\{e^{-kx}\}$ una base. A su vez el conjunto de soluciones de esta ecuación es un subespacio vectorial del espacio de las funciones derivables cuya dimensión es infinita.

   b) Luego resolver la ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

   $y'' - y' + 6y = 0$, con las condiciones iniciales y(0)=3 y y'(0)=-1.

Sabiendo que éste tipo de ecuaciones se resuelve usando la ecuación característica que para éste caso sería: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Encuentrar las raíces λ_1 y λ_2 y reemplazar en la función: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Escribir la base del conjunto solución, y especificar que dimensión tiene. Por último hallar la solución particular definiendo los coeficientes C_1 y C_2, con ayuda de las condiciones iniciales.

c) Averiguar que pasaría si las soluciones de la ecuación característica de una e-cuación diferencial homogénea fueran dobles. Escribir su base.

d) Citar al menos un ejemplo de física donde necesita usar ecuaciones diferenciales.

7. ¿Son los vectores $\vec{u} = (4, -2, 5)$ y $\vec{v} = (1, -1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ combinación lineal de $\vec{x_1} = (1, -1, 2)$ y $\vec{x_2} = (2, 0, 1)$? Interpretar geométricamente y conectar con los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

8. Los primeros cuatro polinomios de Laguere son $\{1, 1-x, 2-4x+x^2, 6-18x+9x^2-x^3\}$. Demuestre que estos polinomios forman un base de $\mathbb{R}^3$.

9. Comprobar que $B = \{1, x, x^2\}$ es una base del espacio vectorial $P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$. En consecuencia dim $P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$=3. ¿Es correcta la afirmación dim $P_{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$= n+1?

10. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{pmatrix}$$

Encontrar los valores de x para los que el det A = 0. Lo cual es equivalente a decir que columnas o filas sean linealmente dependientes. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de los espacios que generen las filas?

Bases. Coordenadas de un vector en una base. Cambios de bases

11. Halle las coordenadas del vector $\vec{x} = (1, 3, -2)$ con respecto a la base B=$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ donde $\vec{b_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{b_2} = (1, 1, 0)$, $\vec{b_3} = (1, 1, 1)$.

12. Encuentre las coordenadas del vector $\vec{w}$ relativas a la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

a) $\vec{u}_1 = (1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1)$; $\vec{w} = (3, 7)$

b) $\vec{u}_1 = (2, -4)$, $\vec{u}_2 = (3, 8)$; $\vec{w} = (1, 1)$

c) $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 2)$; $\vec{w} = (a, b)$

13. Encontrar las coordenadas del vector $\vec{v}$ relativas a la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\vec{v}_3 = (3, 3, 3)$; $\vec{v} = (2, -1, 3)$

14. Encontrar las coordenadas del vector $p \in P_{\mathbb{R}}^{(2)}[x]$ relativas a la base $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

a) $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 + x^2$, $p_3 = x + x^2$; $p = 4 - 3x + x^2$

15. En $M_2(\mathbb{R})$, encontrar las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ relativas a la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

16. Considerar las bases $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ para $\mathbb{R}^2$, donde $\vec{u}_1 = (1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_1 = (2,1)$, $\vec{v}_2 = (-3,4)$.

    a) Hallar la matriz de transición de B a B', $P_{B',B}$.

    b) Utilizar la matriz anterior para obtener las coordenadas en la base B' de $\vec{w} = (3,-5)_B$.

    c) Verificar lo obtenido en b) haciéndolo directamente.

    d) Hallar la matriz de transición $P_{B,B'}$ y verificar que $P_{B,B'} = P^{-1}_{B',B}$.

17. Considerar las bases $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ para $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{u}_1 = (-3,0,-3)$, $\vec{u}_2 = (-3,2,1)$,$\vec{u}_3 = (1,6,-1)$ $\vec{v}_1 = (-6,-6,0)$, $\vec{v}_2 = (-2,-6,4)$ y $\vec{v}_2 = (-2,-3,7)$.

    a) Hallar la matriz de transición de B a B'.

    b) Utilizar la matriz anterior para obtener las coordenadas en la base B' de $\vec{w} = (-5,8,-5)_B$.

18. Considerar las bases $B = \{p_1, p_2\}$ y $B' = \{q_1, q_2\}$ para P_1, donde $p_1 = 6 + 3x$, $p_2 = 10 + 2x$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3 + 2x$.

    a) Hallar la matriz de transición de B a B'.

    b) Utilizar la matriz anterior para obtener las coordenadas de $p = -4 + x$ en la base B'.

19. Se quiere obtener un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'$ haciendo girar un sistema de coordenadas rectangulares xy hasta describir un ángulo de $\theta = \frac{3}{4}\pi$

    a) Hallar las coordenadas $x'y'$ del punto cuyas coordenadas xy son $(-2,6)$

    b) Hallar las coordenadas xy del punto cuyas coordenadas $x'y'$ son $(5,2)$

20. Se quiere obtener un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'z'$ haciendo girar un sistema de coordenadas rectangulares xyz en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje z, cuando se observa hacia abajo a lo largo del eje z hasta describir un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{4}$

    a) Hallar las coordenadas $x'y'z'$ del punto cuyas coordenadas xyz son $(-1,2,5)$

    b) Hallar las coordenadas xyz del punto cuyas coordenadas $x'y'z'$ son $(1,6,-3)$

Ejercicios teóricos

21. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Demuestre que todo conjunto linealmente independiente de n elementos es una base de V.

22. Sean $p_0(x), p_1(x), .., p_n(x)$ polinomios cualesquiera de $\mathbb{P}_n$ de grado 0,1,..,n respectivamente. Demostrar que $\{p_0(x), p_1(x), .., p_n(x)\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$. ¿Podría encontrar alguna relación entre éste teorema y el teorema del resto? ¿y con la fórmula de Taylor?

23. Supongamos que $V_1 \oplus V_2$ y sean $B_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}\}$ y $B_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ bases de V_1 y V_2 respectivamente, compruebe que $B = B_1 \cup B_2$ es una base de $V_1 \oplus V_2$.

24. Sea A=LU, donde L es una matriz triangular inferior invertible y U es triangular superior. Explique por qué la primera columna de A es un múltiplo de la primera columna de L. ¿Cómo se relaciona la segunda columna de A con las columnas de L?

Notación Tensorial.

25. Utilice el convenio de la suma de Einstein para escribir de forma tensorial:

    i) Multiplicación de matrices Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C = A.B$ con elementos c_i^j (el supraíndice indica columna y el subíndice indica fila).

    ii) Dadas dos bases $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}\}$ y $B' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \cdots, \vec{e_n}'\}$, cumpliendose que $\vec{v} = \lambda^l \vec{e_l} = \beta^l \vec{e_l}'$ y llamando Λ_ν^μ a la matriz cambio de base, escriba la relación entre las coordenadas de ambas bases utilizando la matriz cambio de base.

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. Si una matriz tiene dos filas iguales, su determinate vale 0.

2. Si F= $F_1 \oplus F_2 \oplus .. \oplus F_p$ entonces dim F $\neq$ dim F_1 + dim F_1 + .. + dim F_p

3. Si $P_{B,A}$ es invertible entonces $P_{B,A}^{-1} = P_{B,A}$.

4. Siendo A,B y C bases de un espacio vectorial entonces se cumple que $P_{C,B}.P_{B,A} = P_{C,A}$

5. Sea S un conjunto de un espacio vectorial V de dimensión n y suponga que S contiene menos de n vectores, entonces S no puede generar V.

6. Un plano en $\mathbb{R}^3$ es un subespacio de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$.

7. Si un conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_p}\}$ genera un espacio vectorial V de dimensión finita y si T es un conjunto de más de p vectores en V, entonces T es linealmente dependiente.

8. La suma de las matrices simétricas con las matrices antisimétricas es directa generando el espacio vectorial de las matrices.

9. La suma de funciones pares con las funciones impares no es directa.

Nota:
Respuestas del Verdadero o Falso práctica 0: V,F,F,F,F,F,V.