Práctica Preliminar 1

¿Sobre que trata el Álgebra lineal?

1. Buscar la definición de los siguientes objetos matemáticos, escribir algunas de sus carácteristicas, dar ejemplos y redactar una definicion propia:

   a) Un escalar.

   b) Un vector.

   c) Una matriz.

   d) Un tensor.

Espacios Vectoriales. Subespacios. Bases

2. Analizar si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre R (asumiendo que $\oplus$ y $*$ son las operaciones naturales)

   a) El conjunto de puntos $V = \{(x, y) : y = 2x + 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

   b) El semiplano y$\geq$ 0, en $\mathbb{R}^3$.

   c) Los polinomios de grado 2, en P_2.

3. Dar al menos 5 ejemplos de espacios vectoriales y escribir según su opinión, que utilidad podría tener saber si algo se comporta como un espacio vectorial.

4. Sabiendo que si S es un subespacio de un espacio vectorial V sí, y sólo sí, se cumplen las siguientes condiciones:

   i) S contiene al vector $\mathbf{0}$ de V.

   ii) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en S, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en S.

   iii) Si $\mathbf{u}$ está en S y α es un esacalar entonces, $\alpha\mathbf{u}$ está en S.

   Comprobar que si valen las siguientes afirmaciones:

   a) $S = \{(x, y, z) : z = 0\}$, es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   b) El conjunto de polinomios P_2, de grado menor o igual que 2, es subespacio vectorial del espacio vectorial P_n de todos los polinomios con coeficientes reales.

5. ¿Son los vectores $\mathbf{u} = (4, -2, 5)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ combinación lineal de $\mathbf{x_1} = (1, -1, 2)$ y $\mathbf{x_2} = (2, 0, 1)$? Interpretar geométricamente y conectar con los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

6. Averiguar si el conjunto de polinomios $S = \{1 - x, 2 + x + x^2, 1 + x^2\}$ es linealmente independiente.

7. Comprobar que $B = \{1, x, x^2\}$ es una base del espacio vectorial P_2. En consecuencia dim P_2=3. ¿Es correcta la afirmación dim P_n= n+1?

8. Sean $p_0(x), p_1(x), .., p_n(x)$ polinomios cualesquiera de $\mathbb{P}_n$ de grado 0,1,..,n respectivamente. Demostrar que $\{p_0(x), p_1(x), .., p_n(x)\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$. ¿Podría encontrar alguna relación entre éste teorema y el teorema del resto? ¿y con la fórmula de Taylor?

9. Hallar las componentes del vector $\mathbf{x} = (1, 3, -2)$ con respecto a la base B=$\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ donde $\mathbf{b_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b_2} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b_3} = (1, 1, 1)$.

Fecha de entrega del ejercicio 1: jueves 21 de agosto