
Práctica Preliminar 2da parte

Sistemas de ecuaciones lineales

1. a) Demostrar que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden homogénea, con coeficientes constantes: $y' + ky = 0$ es un espacio vectorial de dimensión uno, siendo $\{e^{-kx}\}$ una base. A su vez el conjunto de soluciones de ésta ecuación es un subespacio vectorial del espacio de las funciones derivables cuya diménsión es infinita.

   b) Luego resolver la ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

   $y'' - y' + 6y = 0$, con las condiciones iniciales y(0)=3 y y'(0)=-1.

   Sabiendo que éste tipo de ecuaciones se resuelve usando la ecuación característica que para éste caso sería: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Encuentrar las raices λ_1 y λ_2 y reemplazar en la función: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Escribir la base del conjunto solución, y especificar que dimensión tiene. Por último hallar la solución particular definiendo los coeficientes C_1 y C_2, con ayuda de las condiciones iniciales.

   c) Averiguar que pasaría si las soluciones de la ecuación característica de una ecuación diferencial homogénea fueran dobles. Escribir su base.

   d) Citar al menos un ejemplo de física donde necesita usar ecuaciones diferenciales.

2. Dado el sitema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

   a) Comprobar que las ternas $(2t + 3, -3t - 2, t)$ es solución de dicho sistema.

   b) Justificar porqué éste sistema tiene infinitas soluciones.

   c) ¿Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones?.

3. Dados los sistemas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

   y

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

a) Comprobar que tienen el mismo conjunto solución.

b) Comentar la relación entre los dos sistemas.

c) ¿Cuáles son las llamadas operaciones elementales?.

4. Encontrar los valores de b que hacen que el sistema

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + (b-2)x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + (b-4)x_3 = 3 \end{cases}$$

Tenga una solución, infinitas soluciones, y ninguna solución.

Nota: utilizar el algoritmos de Gauss y prestar atención a la notación.

5. Hallar **X** e **Y** sabiendo que:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Si **A** es una matriz de tamaño $m \times n$ y **B** es una matriz de tamaño $n \times p$, el producto de las matrices **A** y **B** es la matriz de tamaño $m \times p$.

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular cuando sea posible el conmutador que se define como: **A**.**B**- **B**.**A**

7. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el producto $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ usando submatrices.

8. Calcular $\mathbf{A}^6$ siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Demostrar el siguiente enunciado:

   Supongamos que $\mathbf{u_0}$ es una solución particular del sistema de ecuaciones lineales A$\mathbf{x}$= $\mathbf{b}$. Si $\mathbf{v}$ es una solución cualquiera del sistema homogéneo asociado A$\mathbf{x}$= $\mathbf{0}$ entonces $\mathbf{u_0} + \mathbf{v}$ es solución de A$\mathbf{x}$= $\mathbf{b}$.

10. ¿ Es invertible la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

?

Justifiqué de varias maneras su conclusión.

11. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar los valores del parámetro b para que A sea invertible.

12. Demostrar que si una matriz tiene dos filas iguales, su determinate vale 0. ¿Y sí es combinación lineal de las demás cuanto vale su determinate?

13. Demostrar que si una matriz A de tamaño n $\times$ n el det (tA)= $t^n detA$ siendo t un escalar cualquiera.

14. Pensar una forma conveniente para calcular el valor del determinate de una matriz cuadrada y usarlo para calcular el determinate de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

15. Demostrar que si

    i) D = $[d_{ij}]$ una matriz diagonal de tamaño n $\times$ n. Entonces det D = $\prod_i^n d_{ii}$.

    ii) Si A es una matriz triangular del tamaño n $\times$ n, entonces det A es producto de los elementos diagonales de A.

16. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{pmatrix}$$

    Encontrar los valores de x para los que el det A = 0. Lo cual es equivalente a decir que columnas o filas sean linealmente dependientes. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de los espacios que generen?

17. Dados los tres pares de datos (0,-1), (1,1) y (2,0), hallar el polinomio de interpolación de dichos pares de datos. Evaluar el valor de y si x=2/3. Sabiendo que interpola a estos tres pares de datos un polinomio de grado menor o igual que dos: p(x)= $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Fecha de entrega del primer ejercicio: jueves 28 de agosto.