

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES Y SUS APLICACIONES EN IMÁGENES

Integrantes: Alexander Taube, Matias Ruiz Diaz, Cristian Fernández.

INTRODUCCIÓN

- **Los valores singulares han sido estudiados por diversas disciplinas matemáticas, como el análisis matricial, el análisis funcional y las ecuaciones en derivadas parciales; pero fundamentalmente por el álgebra lineal numérica.**
- **En el siglo XIX los geómetras diferenciales (Beltrami, Camille Jordan, Wielandt, John Sylvester, Lanczos, entre otros) buscaban reducir una forma cuadrática a una diagonal mediante transformaciones ortogonales.**

- Beltrami demostró que si A es una matriz de la forma bilineal real, no singular y cuadrada, entonces existe una descomposición del tipo

$$U^T \cdot A \cdot V = S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

donde U y V son matrices ortogonales, y los valores singulares correspondientes son las raíces cuadradas positivas de $A \cdot A^T$ o $A^T \cdot A$, ya que son matrices semejantes

¿QUÉ SON LOS VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ?

- Los valores singulares de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se definen como las raíces cuadradas no negativas de los autovalores de la matriz simétrica $A^T A$, que siempre es definida no negativa (o semidefinida positiva).

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$$

- Se ordenan en forma decreciente, siendo $p = \min(m, n)$

DESCOMPOSICIÓN DE VALOR SINGULAR

Teorema: Descomposición de valor singular

- Sea A una matriz de $m \times n$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$. Entonces, existe una matriz U ortogonal de $m \times m$, una matriz V ortogonal de $n \times n$ y una matriz Σ de $m \times n$ tales que

$$A = U \Sigma V^T$$

Esta factorización de A se conoce como descomposición de valor singular (DVS) de A

r es el rango de A

- Las columnas de U se denominan vectores singulares por la izquierda de A , mientras que las columnas de V son los vectores singulares por la derecha de A
- Las matrices U y V no están determinadas en forma única por A , sino que Σ debe contener los valores singulares de A .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

La matriz Σ tiene las mismas dimensiones que A , y la matriz D es una matriz diagonal cuyo orden es igual al rango de A .

- Algunos ejemplos de una matriz Σ de esta clase con $r=2$ (r es el rango de A) son:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para construir la matriz ortogonal V , primero determinamos una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ compuesta por autovalores de $A^T A$ de $n \times n$
- $V = [v_1, \dots, v_n]$ es una matriz ortogonal de $n \times n$
- Para hallar la matriz ortogonal U debemos demostrar que $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores de \mathbb{R}^m

- Notemos que los valores singulares satisfacen $\sigma_i > 0$, y que los primeros r de estos son distintos de cero. Por lo tanto podemos normalizar u_i al establecer $\|u_i\| = 1$ para $i=1, \dots, r$

- De esta manera obtenemos un conjunto ortonormal de R^m , pero si $r < m$ debemos extenderlo a una base ortonormal de R^m

- **Ejemplos: encontrar una descomposición de valor singular de las matrices**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

FORMA DE PRODUCTO EXTERNO DE LA DVS

Teorema: Sea A una matriz de $m \times n$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$$

Sean v_1, v_2, \dots, v_r vectores singulares por la izquierda y sean u_1, u_2, \dots, u_r vectores singulares por la derecha de A correspondientes a esos valores singulares.

Entonces

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$$

• **Observación:** la DVS es una generalización del teorema espectral y el teorema del producto externo de la DVS generaliza la descomposición espectral.

• La DVS de una matriz A contiene mucha información importante acerca de A , como demostraremos en el siguiente teorema:

Sea $A = U \Sigma V^T$ una descomposición de valor singular de una matriz A de $m \times n$. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ todos los valores singulares distintos de cero de A . Entonces:

a) El rango de A es r

b) $\{u_1, \dots, u_r\}$ es una base ortonormal de $\text{col}(A)$

c) $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal de $\text{nul}(A^T)$

d) $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base ortonormal de $\text{renglón}(A)$

e) $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de $\text{nul}(A)$

MOTIVACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DVS

- Es preciso recordar que una matriz de dimensiones $m \times n$ transforma la esfera unitaria en un elipsoide de \mathbb{R}^m .
Demostraremos este resultado en el siguiente teorema:
- Sea $A = U\Sigma V^T$ una descomposición de valor singular de una matriz A de $m \times n$ con rango r . Por consiguiente, la imagen \mathbb{R}^n de la esfera unitaria en bajo la transformación matricial que mapea x a Ax es \mathbb{R}^m
 - a. La superficie de un elipsoide en \mathbb{R}^m si $r=n$.
 - b. un elipsoide sólido en \mathbb{R}^m si $r < n$

Ejemplo: describir la imagen de la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 bajo la acción de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ya habíamos calculado previamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Al ser $r = \text{rango}(A) = 2 < 3 = n$, y

$$\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 1$$

de que los valores singulares de A son

$$\frac{y_1^2}{2} + y_2^2 \leq 1$$

desigualdad

la imagen de la esfera unitaria satisface la

o , **relativa a los ejes coordenados y_1 y y_2 de**

(correspondientes a los vectores singulares por la izquierda u_1 y u_2). Debido a que $u_1 = e_1$ y $u_2 = e_2$, la imagen siguiente:

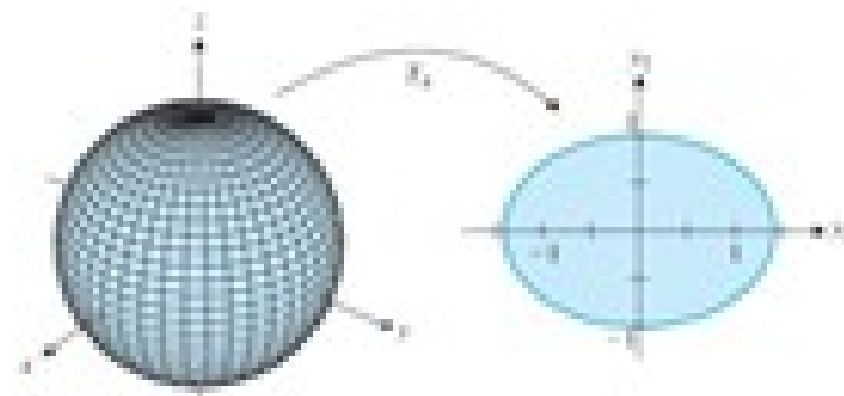


Figure 1.10



- Geométricamente puede describirse el efecto de una matriz A de $m \times n$ sobre la esfera unitaria en \mathbb{R}^n en términos del efecto de cada factor en su DVS, $A = U \Sigma V^T$, de derecha a izquierda.
- V es una matriz ortogonal, mapea la esfera unitaria hacia sí misma.
- La matriz Σ de $m \times n$ hace dos cosas: las entradas $u_{r+1} = u_{r+2} = \dots = u_n$ colapsan $n-r$ de las dimensiones de la esfera unitaria, dejando una esfera unitaria r -dimensional, a la cual las entradas diagonales distintas de cero distorsionan en un elipsoide.
- La matriz ortogonal U alinea luego los ejes de este elipsoide con los vectores de base ortonormales u_1, \dots, u_r en \mathbb{R}^m .

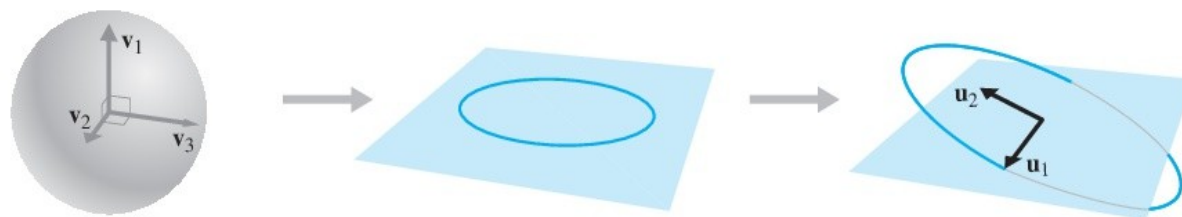


Figura 7.21

EXISTENCIA Y UNICIDAD

- **Teorema (Descomposición SVD):** Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tiene una descomposición en valores singulares de la forma $A = U \Sigma V^T$.
 - Los valores singulares están determinados de manera única. Si A es cuadrada y los σ_j son distintos, las $e^{i\phi}$ columnas U y V son únicas a menos del signo (por ejemplo un factor -1).

A continuación veremos una aplicación del método de descomposición en valores singulares para la resolución de un sistema de ecuaciones particular. Como solución obtendremos una imagen codificada en el vector x en lugar de la matriz A . En la práctica queremos reconstruir una imagen a partir de la emisión de rayos X en una tomografía computarizada

Reconstrucción de imágenes por emisión de rayos X en una tomografía computarizada:

Una tomografía computarizada brinda una imagen digitalizada de una región plana R , con el objetivo de conseguir una reconstrucción en blanco y negro de la misma. El procedimiento es el siguiente

- i) Enmarcar en un rectángulo la zona R a reproducir**
- ii) Dividir el rectángulo en pequeños cuadrados, los denominados píxeles**
- iii) Colorear cada píxel de gris con una intensidad predeterminada**

Si n es la cantidad de píxeles obtenidos entonces, como habíamos visto antes, cuanto mayor sea n mejor será la calidad de la imagen reproducida. Para reconstruir un cuerpo con volumen puede aplicarse el mismo procedimiento.

En las imágenes reproducidas por un tomógrafo computarizado la intensidad del color asignado a cada píxel de la malla depende de la densidad del tejido cuya imagen se desea reproducir. A priori la densidad del cuerpo a reconstruir es desconocida (es la incógnita del problema a resolver). Por lo tanto el tomógrafo deberá procesar información que le permita inferir la densidad del cuerpo en cada uno de los píxeles de la malla.

La reconstrucción de las imágenes se efectúa del siguiente modo:

- i) Una fuente externa al cuerpo a reconstruir emite un rayo i que lo atraviesa
- ii) Al atravesar el cuerpo el rayo i sufre una pérdida de intensidad que es directamente proporcional a la densidad del cuerpo atravesado.
- iii) Un receptor externo recibe al rayo y mide la atenuación total que ha sufrido al atravesar el cuerpo

()

Supongamos que la región a reconstruir es atravesada por m rayos, numerados de 1 a m y que la malla posee n píxeles numerados de 1 a n . A partir del ángulo que forma el rayo i con la fuente emisora y del tamaño de la malla se puede determinar la longitud del tramo de rayo que atraviesa cada píxel. Denotamos l_{ij} a la longitud del rayo i que atraviesa el píxel j , y a_j a la atenuación del rayo i medida en el receptor. Si suponemos que la densidad del cuerpo es constante en cada píxel de la malla, y que el factor de atenuación es proporcional a la longitud del tramo del rayo i que atraviesa el píxel j , la contribución a la atenuación total del rayo i debida al paso por el píxel j será entonces $a_{ij} x_j$ para cierto x_j (que depende únicamente del píxel j y no del rayo)

$$x_j$$

$$x_j$$

$$a_{ij} x_j$$

La atenuación total en el rayo i se obtiene sumando la atenuación sufrida a lo largo de todos los píxeles que el rayo atraviesa, es decir

$$\sum_{j=1}^m x_j$$

$i=1, \dots, m$

Para poder inferir la densidad del tejido del píxel j debemos hallar la atenuación ocurrida al atravesar el píxel j . Como un rayo sólo atraviesa algunos píxeles se debe atravesar la región por varios rayos y procesar en forma conjunta la información obtenida por todos ellos.

En notación matricial reconstruir la imagen equivale a resolver el sistema

$$Ax=b.$$

Cada fila de A corresponde a un rayo, y atraviesa el píxel j .

si el rayo i no

• **Consideraciones a tener en cuenta**

- i) Para conseguir una buena reconstrucción de la imagen debemos dividir la región en un número grande de píxeles (n grande) y emplear muchos rayos para atravesarla (m grande)**
- ii) Un rayo puede atravesar pocos píxeles, por lo tanto la ecuación asociada a cada rayo tiene muchos coeficientes nulos. Por lo tanto la matriz A es dispersa**
- iii) Si la cantidad de rayos emitidos es menor que la cantidad de píxeles ($m < n$) entonces el sistema tendrá infinitas soluciones. En este caso se halla la solución que da la menor atenuación de píxeles (solución de mínima norma)**
- iv) Si la cantidad de rayos emitidos es mayor que la cantidad de píxeles ($m > n$) entonces el sistema podría no tener solución. Lo mismo puede ocurrir si por errores de redondeo en las mediciones realizadas para cualquier b_i , el sistema resulta incompatible.**

Además, la atenuación de la energía a_j es una integral de línea a lo largo de la trayectoria del rayo i , y b_i es el valor de esa integral, mientras que cada ecuación planteada es una suma de Riemann. Entonces es altamente probable que el sistema planteado sea inconsistente. Como ya fue expuesto anteriormente, pueden hallarse valores para b_i que satisfagan que la diferencia $Ax - b$ sea tan pequeña como sea posible. Buscamos la solución al problema de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$.

COMPRESIÓN DE IMÁGENES MEDIANTE EL USO DE LA SVD

- Levantamiento de imágenes a partir de una matriz:
- Toda imagen digital está representada por una matriz como una tabla de píxeles, cada uno con una densidad determinada. Las entradas indican el color (o valor de gris, si fuese en blanco y negro) de cada pixel de la imagen en cuestión. En el caso de estas últimas, cada pixel tiene 256 tonos de gris y se representa mediante un número entre 0 y 255.
- Por ejemplo la matriz identidad representa un cuadrado blanco con su diagonal principal pintada de negro (los números entre 0 y 1 determinan la densidad de color gris en cada pixel; el 0 representa al color blanco puro y el 1 al negro)
- Compresión de imágenes digitales:
- Muchas veces surge la necesidad de enviar imágenes por medios electrónicos (por satélite, fax, internet o medios semejantes) y si las matrices asociadas a estas imágenes es demasiado grande, la cantidad de memoria necesaria para guardar los datos que contiene es muy significativa. Mostraremos un método mediante el cual, enviando sólo información parcial de la matriz, logramos que se pierda la menor cantidad de información posible sobre la imagen.

$$A = U\Sigma V^T$$

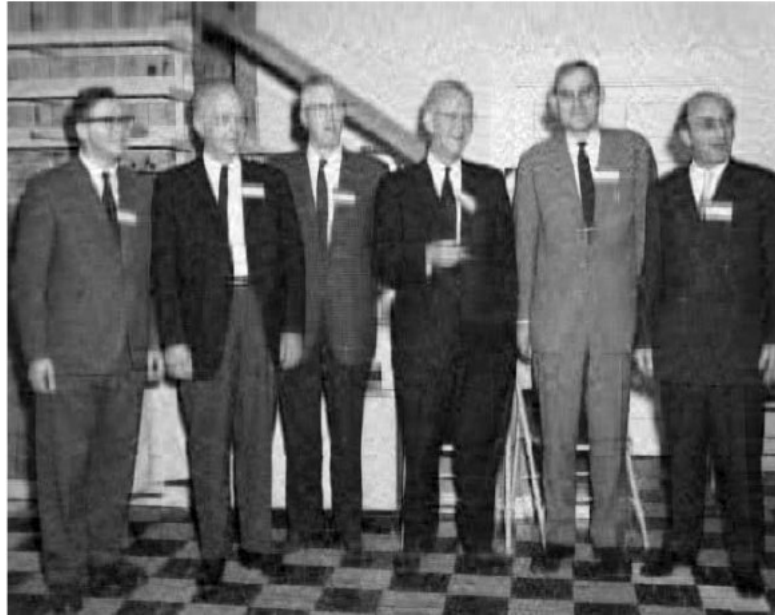
- En primer lugar, dada la matriz A que representa la imagen en cuestión, realizamos su descomposición en valores singulares σ_{k+1} a partir de la cual obtenemos su descomposición diádica A_k .
- El teorema de Eckart y Young afirma que si sólo conservamos los primeros k términos ($k < n$) de la factorización diádica, la distancia entre la matriz obtenida y A es exactamente σ_{k+1} . Además, la matriz A_k es la más próxima a A entre todas las matrices de rango k . Como los valores singulares se encuentran en orden decreciente entonces con la matriz reducida tenemos una buena aproximación de la matriz inicial A .
- En efecto si queremos transmitir la matriz A necesitamos enviar las n columnas de U y de V además de los n valores singulares de A , mientras que para transmitir A_k solamente se envían k de los elementos antes mencionados.
- Cabe destacar que generalmente enviando como máximo un 25% o incluso menos valores singulares de la matriz original puede reconstruirse su imagen casi a la perfección.

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$$

Imagen original, correspondiente a una matriz de rango $r=480$



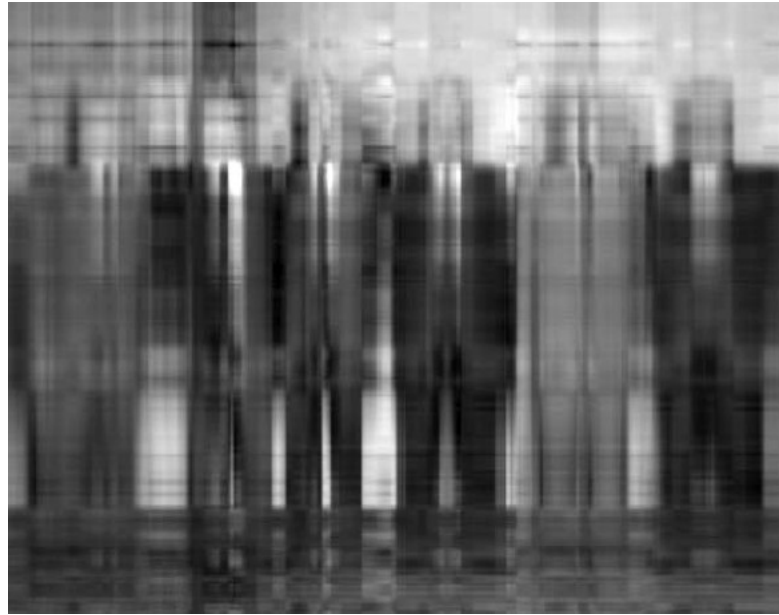
Aproximación correspondiente a una matriz de rango $k=50$



Aproximación correspondiente a una matriz de rango $k=10$



Aproximación correspondiente a una matriz de rango $k=5$



Bibliografía:

<https://>

www.researchgate.net/publication/263583897_La_descomposicion_en_valores_singulares_SVD_y_algunas_de_sus_aplicaciones

[Valores_singulares_svd_onlineverRamiroyleo.pdf](#)

svd.uba.pdf

'Algebra lineal. Una introducción moderna', David Poole, Trent University

<http://estebanmoro.org/2008/12/valores-singulares-para-comprimir-imagenes/>

http://www.ehu.eus/izaballa/Cursos/valores_singulares.pdf