Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2015

Trabajo Práctico N° 6

Análisis cuasi-geostrófico de flujo de gran escala

1. Como se ha demostrado en TP anteriores, el viento ageostrófico puede expresarse del siguiente modo:

$$\bar{V}_{ag} = \frac{\hat{k}}{f} \times \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\hat{k}}{f} \times \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} + \omega \frac{\partial \bar{V}}{\partial p} \right)$$

En el marco de la teoría cuasi-geostrófica el viento real puede ser aproximado por el viento geostrófico, y los primeros dos términos de esta expresión representan a la tendencia local del viento, conocido como *viento isalobárico* (V_{isal}), y a la *componente inercial advectiva* (V_{ia}). En estudios sinópticos, el tercer término (*componente convectiva del movimiento*) puede ser omitido.

a. Demostrar que el viento isalobárico puede ser expresado en términos de la *tendencia del geopotencial* (χ) del siguiente modo:

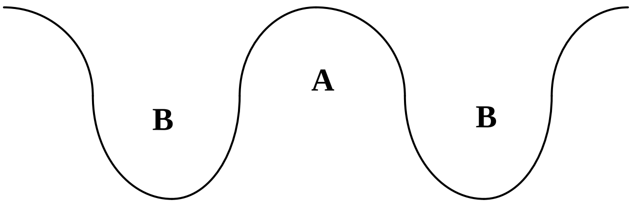
$$V_{isal} = -\frac{1}{f_0^2} \nabla \chi$$

b. Demostrar que la componente advectiva inercial del viento ageostrófico puede expresarse del siguiente modo:

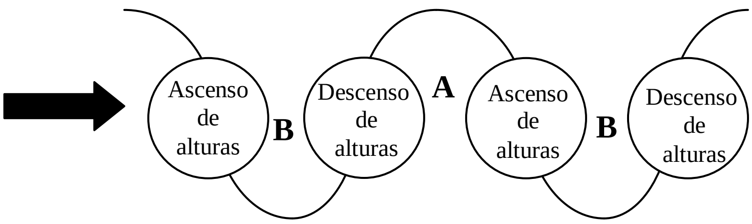
$$\bar{V}_{ia} = -\frac{\bar{V}_g \zeta_g}{f}$$

c. A partir de la expresión hallada en el inciso b., y utilizando esquemas gráficos simples, analizar el comportamiento de V_{ia} en la entrada y salida de una corriente en chorro, y en un tren de ondas del campo de geopotencial en troposfera alta.

2. a. Considerar una onda troposférica como la que se indica en la siguiente figura (latitudes medias del hemisferio norte). A partir del análisis del viento ageostrófico indicar regiones de ascenso y descenso del aire.



b. La onda presentada en el inciso anterior tiene asociada una distribución de ascensos y descensos de alturas como la indicada en la siguiente figura. ¿Qué puede concluirse (cuantitativamente) sobre las magnitudes de las componentes isalobárica y advectiva del viento ageostrófico en ese nivel?



3. Demostrar que la ecuación de la tendencia del geopotencial cuasigeostrófica puede escribirse como una ecuación de conservación de vorticidad potencial cuasi-geostrófica (q):

$$\frac{d_g q}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \cdot \nabla \right) q = 0$$

donde

$$q \equiv \left[\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]$$

4. Dada la siguiente expresión para el campo geopotencial:

$$\phi = \phi_0(p) + cf_0 \left\{ y \left[\cos\left(\pi p / p_0 \right) + 1 \right] + k^{-1} sen\left(k \left(x - ct \right) \right) \right\}$$

donde c es una velocidad constante, k el número de onda zonal y p_0 = 1000 hPa.

a. Obtener expresiones para el viento geostrófico y la vorticidad relativa.

b. Calcular la advección de vorticidad relativa.

c. Utilizar la ecuación de vorticidad cuasi-geostrófica para obtener el campo de divergencia horizontal consistente con el campo ϕ, asumiendo f constante.

d. Asumiendo $\omega(p_0) = 0$ obtener una expresión para ω(x,y,p,t) integrando la ecuación de continuidad con respecto a la presión.

e. Calcular el vector Q.

5. Considerando la distribución del geopotencial del ejercicio 4, y asumiendo que σ es constante, obtener una expresión alternativa para ω utilizando la ecuación termodinámica cuasigeostrófica. ¿Para qué valor de k coincide esta expresión con la obtenida en el ejercicio 4?

6. Teniendo en cuenta las funciones forzantes de la ecuación omega:

a. Describir mediante un esquema simple por qué se producen ascensos en la delantera de vaguada. Considerar como ejemplo el hemisferio sur.

b. Indicar con una X la respuesta correcta y justificar la elección realizada.

$\bar{u}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) > 0$ corresponde a advección térmica	fría	
	caliente	
$\bar{u}_g \cdot \nabla \left(\xi_g \right) > 0$ corresponde a advección de vorticidad relativa geostrófica	ciclónica	
	anticiclónica	

Respuestas

4. a. $\zeta_g = -cksen\left(k\left(x-ct\right)\right)$ // $\bar{V}_g = \left(c\left[1+\cos\left(\pi p/p_0\right)\right], c\cos\left(k\left(x-ct\right)\right)\right)$

b. $-\bar{V}_g \cdot \nabla\zeta_g = c^2k^2\cos\left(k\left(x-ct\right)\right)\left[1+\cos\left(\pi p/p_0\right)\right]$

c. $\nabla\cdot\bar{V} = \left(c^2k^2/f_0\right)\cos\left(\pi p/p_0\right)\cos\left(k\left(x-ct\right)\right)$

d. $\omega = \left(p_0/\pi\right)\left(c^2k^2/f_0\right)sen\left(\pi p/p_0\right)\cos\left(k\left(x-ct\right)\right)$

e. $Q_1 = \left(c^2kf_0\pi/p_0\right)sen\left(\pi p/p_0\right)sen\left(k\left(x-ct\right)\right)$ // $Q_2 = 0$

5. $\omega = \left(c^2f_0\pi/\sigma p_0\right)sen\left(\pi p/p_0\right)\cos\left(k\left(x-ct\right)\right)$ → $k^2 = \left(f_0^2\pi^2/\sigma p_0^2\right)$

Marco teórico

Ecuación omega cuasigeostrófica: partiendo del conjunto de 5 ecuaciones fundamentales, y haciendo ciertas suposiciones (entre otras, aproximación plano beta, geostrofismo en ecuación de momento y en componente vertical de vorticidad), puede hallarse la siguiente expresión de la *ecuación de vorticidad cuasigeostrófica*:

$$\frac{\partial\zeta_g}{\partial t} = -\bar{V}_g\cdot\nabla\zeta_g + f_0\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

donde f_0 es el valor del parámetro f a una latitud fija φ_0. Por otra parte, asumiendo que el calentamiento diabático es despreciable, la *ecuación termodinámica cuasigeostrófica* resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) = -\bar{V}_g\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) + \sigma\omega$$

donde σ es el *parámetro de estabilidad estática*: $\sigma = \frac{RS_p}{p} = -\alpha\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}$

Combinando las ecuaciones anteriores y operando matemáticamente puede llegarse la siguiente expresión de la *ecuación omega cuasigeostrófica*:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left[\bar{V}_g\cdot\nabla\left(\zeta_g + f\right)\right] + \frac{1}{\sigma}\nabla^2\left[\bar{V}_g\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right]$$

Ecuación de tendencia del geopotencial cuasigeostrófica: esta ecuación permite el pronóstico de la circulación geostrófica basándose en las ecuaciones cuasi-geostróficas. Reescribiendo estas últimas en términos de la tendencia del geopotencial y combinándolas, puede hallarse la siguiente ecuación de tendencia del geopotencial:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi = -f_0\bar{V}_g\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\phi + f\right) - \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left[\bar{V}_g\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right]$$

Representación del vector Q: definiendo a Q_1 y Q_2 como magnitudes de la tendencia geostrófica:

$$Q_1 = -\frac{\partial\bar{V}_g}{\partial x}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right),\ Q_2 = -\frac{\partial\bar{V}_g}{\partial y}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)$$

se obtiene la siguiente expresión del vector Q en coordenadas naturales (s en la dirección de las isotermas y n atravesándolas, hacia el aire más frío):

$$\bar{Q} = -\frac{R}{p}\left|\frac{\partial T}{\partial n}\right|\left[\hat{k}\times\frac{\partial\bar{V}_g}{\partial s}\right]$$