Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2014

Trabajo Práctico N° 3

Ecuaciones de conservación

1. Considerar un flujo de aire en estado estacionario sobre un edificio de 10 m de altura. Asumir que en esta región de la atmósfera la densidad es constante e igual a 1.3 kg/m^3, y que la temperatura no varía con la altura. Para este caso, si la velocidad del viento observada en la superficie es 5 m/s y en el techo 9 m/s, determinar:
   a. La diferencia de presión entre la superficie y el techo del edificio (a este valor lo denominaremos Δp_{din}).
   b. La diferencia de presión entre la superficie y el techo que se debe puramente a la hidrostaticidad (a este valor lo denominaremos Δp_{hid}).
   c. La magnitud y dirección de la fuerza del gradiente de presión no hidrostático generado por la diferencia entre Δp_{din} y Δp_{hid}.

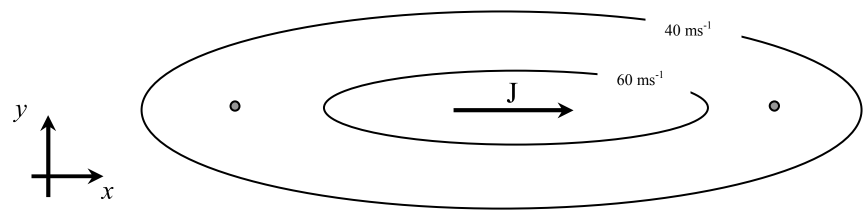
2. La forma vectorial de la ecuación de movimiento (componente horizontal) en ausencia de fricción puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\widehat{k} \times \overline{V}$$

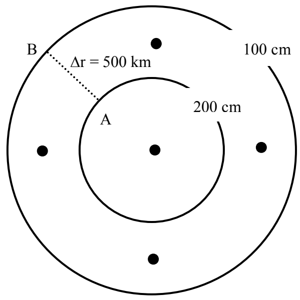
   a. Expandir la expresión dada en componentes *x* e *y*.
   b. El *viento geostrófico* resulta de considerar el balance entre la fuerza del gradiente de presión y la fuerza de Coriolis. Hallar su expresión en forma vectorial y en sus componentes *x* e *y*.
   c. El apartamiento entre el viento real y el balance dado por el viento geostrófico recibe el nombre de *viento ageostrófico*. Demostrar que el vector que representa a este viento puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\overline{V}_{ag} = \frac{\widehat{k}}{f} \times \frac{d\overline{V}}{dt}$$

   d. Considerando el máximo de vientos (conocido como *jet* o *corriente en chorro*) en el nivel de 300 mb, localizado en el hemisferio sur, que se representa en el siguiente gráfico de isotacas, esquematizar el viento ageostrófico en los dos círculos sombreados. Teniendo en cuenta el campo de viento ageostrófico obtenido, ¿dónde se observaría divergencia y convergencia en altura?



3. Se conoce como *efecto de barómetro invertido* al resultado de la interacción entre la atmósfera y el océano en el cual se observa que debido a una disminución de la presión atmosférica se produce un ascenso en el nivel del mar, y viceversa. Suponer que para estudiar este efecto sólo se dispone de un instrumento satelital que puede medir la *anomalía en la elevación del mar* (apartamiento de la superficie del océano respecto del nivel medio del mar) con una precisión de 1 cm. En la siguiente figura se representan isolíneas de esta anomalía obtenidas a partir de registros sobre una extensa región del Océano Atlántico, a la altura de Buenos Aires (φ = - 35º):



   a. Si la densidad del agua es ρ_w = 1000 kg/m^3, calcular la magnitud del gradiente de presión atmosférico a nivel del mar entre A y B.
   b. Determinar la velocidad y dirección del viento geostrófico que debería observarse en los puntos indicados entre las isolíneas de la figura. ¿Es el flujo general ciclónico o anticiclónico?

4. Suponer que en La Plata la temperatura disminuye a una tasa constante entre los niveles de 1000 a 500 hPa. Si la temperatura en el nivel de 500 hPa es -30°C, y el espesor de la capa 1000-500 hPa es 5180m, ¿qué temperatura debería registrarse en la FCAG en el nivel de 1000 hPa?

5. Considerar una columna de aire de 1 m^2 de área en la capa 1000-850 hPa que está sujeta a un calentamiento Q = 3 x 10^6 J. Sabiendo que el calor por unidad de masa agregado a la columna es igual al producto entre el calor específico del aire a presión constante (c_p = 1004 J K^{-1}kg^{-1}) y la variación de temperatura, ¿cuál es el cambio en la altura geopotencial del nivel de 850 hPa si el cambio en el de 1000 hPa es nulo?

6. Demostrar que la ecuación de continuidad de un fluido de densidad variable puede expresarse del siguiente modo (V es el volumen de la parcela):

$$\frac{1}{V}\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

7. a. Sabiendo que el calor específico a volumen constante (c_v) y a presión constante (c_p) están relacionados por la ecuación $c_p = c_v + R$, hallar la expresión de la *temperatura potencial* (θ) (temperatura que tendría una parcela si es comprimida o expandida adiabaticamente a una presión de referencia de 1000 hPa).
   b. La *densidad potencial* (D) es un parámetro de diagnóstico útil y se define como la densidad de la parcela de aire si ésta fuera comprimida o expandida a 1000 hPa. Hallar una expresión para D y demostrar que el producto θ y D es una constante.

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2014

Respuestas

1. a. Δp_{din} = 163,8 Pa
   b. Δp_{hid} = 127,5 Pa
   c. $F_{gp(no\text{-}hid)}$ = 2,79 m/s² (dirigida hacia arriba)
2. a. $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + fv$ / $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - fu$
   b. $\overline{V}_g = \widehat{k} \times \dfrac{1}{\rho f}\nabla p$
3. a. $\partial p/\partial n$ = - 1,96 x 10^{-2} Pa/m
   b. V = 180,2 m/s / El flujo es anticiclónico
4. $T_{1000\,hPa}$ = 267 K = -6 °C
5. Δz_{850} = 9,29 m
7. a. $\theta = T\left(1000/p\right)^{R/c_p}$
   b. $D = \rho\left(1000/p\right)^{c_v/c_p}$ / $\theta.D$ = cte = 3,484

Marco teórico

Ley de los gases ideales: vincula la presión, la densidad y la temperatura de un fluido:

$$p = \rho R_d T = \left(1/\alpha\right) R_d T$$

donde R_d es la constante de los gases para aire seco (R_d = 287 J kg^{-1}K^{-1}) y α es el volumen específico (recíproco de la densidad).

Primera ley de la Termodinámica: vincula la absorción de calor con la energía interna y la energía mecánica:

$$\dot{Q} = c_v \frac{dT}{dt} + p\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

donde $\dot{Q}$ representa la tasa de calentamiento diabático y c_v es el calor específico del aire seco a volumen constante (c_v =717 J kg^{-1}K^{-1}).

Ecuación hipsométrica: vincula el espesor (Δz) de una columna de aire entre dos isobaras (a presiones p_1 y p_2):

$$\frac{R_d \overline{T}_V}{g}\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = z_2 - z_1 = \Delta z$$

donde g es la gravedad, y T_V es la temperatura virtual media (promediada en términos de la presión) en la columna de aire.

<u>Conservación del momento (ecuación de movimiento)</u>: vincula la aceleración en un sistema rotante con la fuerza de Coriolis, la fuerza debido al gradiente de presión, la gravedad (que incluye la fuerza centrífuga) y la fuerza de fricción:

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = -2\overline{\Omega}\times\overline{U} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \overline{g} + \overline{F}_r$$

que en un sistema rotante queda expresada del siguiente modo:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv\tan(\varphi)}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega sen(\varphi)v - 2\Omega\cos(\varphi)w + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{u^2\tan(\varphi)}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega sen(\varphi)u + F_y$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{u^2+v^2}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega\cos(\varphi)u + F_z$$

<u>Conservación de masa:</u> establece el balance de masa del fluido considerando las entradas y salidas. Puede expresarse de dos modos diferentes:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot\overline{U} = 0 \quad \text{(divergencia de masa)}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\overline{U}\right) = 0 \quad \text{(divergencia de velocidad)}$$

<u>Conservación de energía:</u> la suma de todas las energías (cinética, potencial, termodinámica, etc.) en el Universo es constante. Sumando la ecuación de energía mecánica y la 1º ley de la termodinámica se obtiene:

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\left(u^2+v^2+w^2\right)}{2} + \phi + c_v T + p\alpha\right] - \alpha\frac{\partial p}{\partial t} - \overline{V}\cdot\overline{F}_r$$

donde ϕ es el geopotencial.