Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2014

Trabajo Práctico Inicial

Herramientas matemáticas útiles

1. a. Sea una función $\phi(x,y)$ tal que $\nabla\phi(x,y)=\left(3x,3y^2\right)$. Si se sabe que $\phi(1,1)=8$ obtener la expresión de esta función.

   b. Sea una función $\varphi(x,y,z)$ tal que $\nabla\varphi(x,y,z)=\left(2xyz^2,x^2z^2,2x^2yz\right)$. Si se sabe que $\varphi(1,-2,2)=4$ obtener la expresión de esta función.

2. Sean tres vectores $\overline{A}=\left(-1,5,7\right)$, $\overline{B}=\left(3,0,-4\right)$ y $\overline{C}=\left(0,-6,-4\right)$. Demostrar en forma analítica que $\overline{A}\cdot\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)=-\overline{B}\cdot\left(\overline{A}\times\overline{C}\right)$, y verificar numéricamente esta igualdad.

3. Dado el vector $\overline{A}=(u,v,w)$ y una función escalar *f*, demostrar las siguientes identidades vectoriales:

   a. $\nabla\cdot\left(\nabla\times\overline{A}\right)=0$

   b. $\left(\overline{A}\cdot\nabla\right)\overline{A}=\left(1/2\right)\nabla\left(\overline{A}\cdot\overline{A}\right)-\overline{A}\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)$

   c. $\nabla\cdot\left(f\overline{A}\right)=f\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)+\overline{A}\cdot\nabla f$

4. Comprobar que si φ y ϕ son dos funciones escalares entonces se verifica la siguiente igualdad: $\Delta\left(\phi\varphi\right)=\phi\Delta\varphi+2\nabla\phi\cdot\nabla\varphi+\varphi\Delta\phi$

5. Suponiendo que $\overline{A}_B$ representa la proyección del vector $\overline{A}$ sobre el vector $\overline{B}$ (es decir, la componente del vector $\overline{A}$ paralela al vector $\overline{B}$), hallar una expresión para este vector en términos de $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

6. Suponer que la función $f(x)=\ln(1+x)$ describe una cierta magnitud física. Determinar cuál es el desarrollo en series de Taylor de *f* alrededor de x = 0. A partir de la expresión hallada, calcular (considerando una aproximación de segundo orden) el valor de la magnitud *f* en x = 0.5.

7. Considerar una función continua $f(x)$ y su desarrollo en series de Taylor alrededor de un punto x_0. Dados dos puntos cercanos a x_0, $x_1 = x_0 - \Delta x$ y $x_2 = x_0 + \Delta x$, comprobar que los valores de la derivada primera y la derivada segunda de *f* en x_0 pueden ser calculados en forma aproximada con las siguientes expresiones (lo que denominamos *aproximación de las derivadas en diferencias finitas centrada*):

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$f''(x_0)\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

Nota: en ambas expresiones han sido despreciados los términos que se encuentran multiplicados por Δx^2 y Δx^4, respectivamente.

8. En la siguiente tabla se detallan los valores que toma una cierta función *f* en algunos puntos del intervalo (-2.50, 2.50). Utilizando las expresiones halladas en el ejercicio anterior completar las columnas correspondientes al cálculo aproximado de *f´(x)* y *f´´(x)*, y graficar la función y sus derivadas. Sabiendo que la expresión analítica de función *f* es $f(x) = x^5 - 2x^3 + 7x^2$, calcular el valor de las derivadas en los puntos indicados en la tabla y comparar los resultados obtenidos.

Datos		**Aproximada**		**Analíticas**	
x	*f(x)*	*f´(x)*	*f´´(x)*	*f´(x)*	*f´´(x)*
-2,50	-22,66				
-2,25	0,55				
-2,00	12,00				
-1,75	15,74				
-1,50	14,91				
-1,25	11,79				
-1,00	8,00				
-0,75	4,54				
-0,50	1,97				
-0,25	0,47				
0,00	0,00				
0,25	0,41				
0,50	1,53				
0,75	3,33				
1,00	6,00				
1,25	10,08				
1,50	16,59				
1,75	27,13				
2,00	44,00				
2,25	70,32				
2,50	110,16				

Respuestas

1. a. $\phi(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + y^3 + \frac{11}{2}$

   b. $\phi(x,y,z) = x^2 y z^2 + 12$

5. $\bar{A}_B = \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{B}|}\frac{\bar{B}}{|\bar{B}|}$

6. $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}}{n}x^n$ → $f(0.5) \approx 0.375$ (aproximación de orden 2)

Introducción a la Dinámica de la Atmósfera – 2014

Algunas definiciones

Elementos del cálculo vectorial

Dados dos vectores $\overline{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\overline{B} = (B_x, B_y, B_z)$, con un ángulo entre ellos igual a α, y un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$, se tienen las siguientes operaciones:

a) Suma: $\overline{A} + \overline{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

b) Producto:

b1) Producto por un escalar: $k\overline{A} = (kA_x, kA_y, kA_z)$

b2) Producto escalar: $\overline{A} \cdot \overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\cos(\alpha)$

b3) Producto vectorial: $\overline{A} \times \overline{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$,

cuya magnitud es $\left|\overline{A} \times \overline{B}\right| = \left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right| sen(\alpha)$

c) Operador gradiente: $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$

c1) Gradiente de un campo: $\nabla \phi = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)$

c2) Divergencia de un vector: $\nabla \cdot \overline{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

c3) Rotor de un vector: $\nabla \times \overline{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \dfrac{\partial A_z}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial z}, \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

c4) Laplaciano de un campo: $\Delta \phi = \nabla \cdot \left(\nabla \phi\right) = \nabla^2 \phi = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

d) Operador invariante escalar: $\overline{A} \cdot \nabla = A_x \dfrac{\partial}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial}{\partial z}$

Desarrollo en series de Taylor

Dada una función continua *f*(*x*), el valor de *f* en un punto *x* cercano a x_0 puede ser determinado en forma aproximada con la siguiente expresión polinómica:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

donde han sido despreciados los términos de orden mayor a *n*.